Prova scritta parziale n.4 del 28.05.07 - Soluzioni [1]

1.

$$I = \int_1^e \frac{\log(2\log x)}{x}\,dx$$; ponendo $\log x = t$, $dx/x = dt$ si trova :

$$= \int_0^1 \log(2t)\,dt = \int_0^1 \log 2\,dt + \int_0^1 \log t\,dt = \log 2 + [\![t(\log t - 1]\!]_0^1 =$$
$$= \log 2 - 1.$$

(Le primitive di log t si ottengono integrando per parti; è stato anche utilizzato il fatto che per $t \to 0$ risulta $t \log t \to 0$) .

Poiché $\log(2\log x) \geq 0 \leftrightarrow 2\log x \geq 1 \leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$, l'area richiesta è data da :

$$A = -\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{e}}^e f(x)\,dx = -\int_0^{1/2} \log(2t)\,dt + \int_{1/2}^1 \log(2t)\,dt =$$

$$= -\int_0^{1/2} \log 2\,dt - \int_0^{1/2} \log t\,dx + \int_{1/2}^1 \log 2\,dt + \int_{1/2}^1 \log t\,dt =$$

$$= -[\![t(\log t - 1)]\!]_0^{1/2} + [\![t(\log t - 1)]\!]_{1/2}^1 = \log 2 .$$

2.

Risolviamo prima l'equazione omogenea ; il polinomio caratteristico $k^2 + 2k + 5$ ha come radici la coppia complessa coniugata $-1 \pm 2i$, a cui corrispondono le soluzioni $e^{-x}\cos 2x$, $e^{-x}\,\mathrm{sen}\, 2x$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso e consideriamo l'equazione $z'' + 2z' + 5z = e^x e^{2ix} = e^{(1+2i)x}$; di questa cerchiamo una soluzione $\bar{z}$ nella forma $A\,e^{(1+2i)x}$.
Poiché $\bar{z}' = A(1+2i)e^{(1+2i)x}$, $\bar{z}'' = A(1+2i)^2 e^{(1+2i)x} = A(-3+4i)e^{(1+2i)x}$ si ottiene che deve essere $A(-3 + 4i + 2 + 4i + 5) = 1$, cioè $A = 1/4(1+2i) = (1-2i)/20$. Una soluzione reale dell'equazione completa è la parte immaginaria della funzione $\bar{z}$ trovata :

$$\bar{y}(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^x}{20} (1 - 2i)(\cos 2x + i \,\mathrm{sen}\, 2x) \right) = \frac{e^x}{20} (\mathrm{sen}\, 2x - 2 \cos 2x).$$

L'integrale generale dell'equazione è dunque dato da:

$$y(x) = \frac{e^x}{20} (\mathrm{sen}\, 2x - 2 \cos 2x) + e^{-x} (A \cos 2x + B \,\mathrm{sen}\, 2x).$$

3.

$$a_n \sim \frac{\sqrt{n}\, \log n}{n^2} = \frac{\log n}{n^{3/2}} < \frac{n^{\alpha}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2 - \alpha}}$$

Scelto α in modo che risulti $3/2 - \alpha > 1$ (cioè $0 < \alpha < 1/2$) , il procedimento permette di concludere per confronto che la serie data è convergente.

1.

$$I = \int_1^e \frac{\log(3\log x)}{x}\,dx$$; ponendo $\log x = t$, $dx/x = dt$ si trova :

$$= \int_0^1 \log(3t)\,dt = \int_0^1 \log 3\,dt + \int_0^1 \log t\,dt = \log 3 + [\![t(\log t - 1)]\!]_0^1 = \quad =$$

$\log 3 - 1$.

(Le primitive di log t si ottengono integrando per parti; è stato anche utilizzato il fatto che per $t \to 0$ risulta $t \log t \to 0$) .

Poiché $\log(3\log x) \geq 0 \leftrightarrow 3\log x \geq 1 \leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{e}$, l'area richiesta è data da :

$$A = -\int_1^{\sqrt[3]{e}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt[3]{e}}^{e} f(x)\,dx = -\int_0^{1/3} \log(3t)\,dt + \int_{1/3}^{1} \log(3t)\,dt =$$

$$= -\int_0^{1/3} \log 3\,dt - \int_0^{1/3} \log t\,dx + \int_{1/3}^{1} \log 3\,dt + \int_{1/3}^{1} \log t\,dt =$$

$$= \frac{\log 3}{3} - [\![t(\log t - 1)]\!]_0^{1/3} + [\![t(\log t - 1)]\!]_{1/3}^{1} = \log 3 - (1/3).$$

2.

Risolviamo prima l'equazione omogenea ; il polinomio caratteristico $k^2 + 2k + 2$ ha come radici la coppia complessa coniugata $-1 \pm i$, a cui corrispondono le soluzioni $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso e consideriamo l'equazione $z'' + 2z' + 2z = e^{2x}e^{ix} = e^{(2+i)x}$; di questa cerchiamo una soluzione $\bar{z}$ nella forma $A\,e^{(2+i)x}$.
Poiché $\bar{z}' = A(2+i)\,e^{(2+i)x}$, $\bar{z}'' = A(2+i)^2 e^{(2+i)x} = A(3+4i)\,e^{(2+i)x}$ si ottiene che deve essere $A(3 + 4i + 4 + 2i + 2) = 1$, cioè $A = 1/(3(1+2i)) = (3 - 2i)/39$. Una soluzione reale dell'equazione completa è la parte reale della funzione $\bar{z}$ trovata :

$$\bar{y}(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2x}}{39} (3 - 2i)(\cos x + i \operatorname{sen} x) \right) = \frac{e^{2x}}{39} (2 \operatorname{sen}x + 3 \cos x) .$$

L'integrale generale dell'equazione è dunque dato da:

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{39} (2 \operatorname{sen}x + 3 \cos x) + e^{-x} (A \cos x + B \operatorname{sen} x) .$$

3.

$$a_n \sim \frac{\sqrt{n}\, \log^2 n}{n^2} = \frac{\log^2 n}{n^{3/2}} < \frac{n^{2\alpha}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2 - 2\alpha}}$$

Scelto α in modo che risulti $3/2 - 2\alpha > 1$ (cioè $0 < \alpha < 1/4$) , il procedimento permette di concludere per confronto che la serie data è convergente.