[fila 1]

1.

(a)

$$f(x) = (x^2)^{1/\mathrm{tg}(x-1)} = e^{\log(x^2)/\,\mathrm{tg}(x-1)}$$

$$\text{Per } x \to 1 \qquad \frac{\log(x^2)}{\mathrm{tg}(x-1)} \approx \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \to 2$$

La funzione può essere prolungata con continuità, ponendo $f(1) = e^{2}$.

(b)

$$f'(x) = (x^2)^{1/\mathrm{tg}(x-1)} \frac{\frac{2}{x}\log(x-1) - \frac{\log(x^2)}{\cos^2(x-1)}}{\mathrm{tg}^2(x-1)} = \ldots\ldots =$$

$$= (x^2)^{1/\mathrm{tg}(x-1)} \frac{\mathrm{sen}\,2(x-1) - 2x\log|x|}{x\,\mathrm{sen}^2(x-1)} \quad .$$

2.

$$\log(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$$

$$\log^2(1+x) = (x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4))^2 =$$

$$= x^2 - x^3 + 11x^4/12 + o(x^4)$$

$$\mathrm{sen}x - \mathrm{tg}(\mathrm{sen}x) = x - x^3/6 - \mathrm{tg}(x - x^3/6 + o(x^3)) + o(x^3) =$$

$$= (x - x^3/6) - (x - x^3/6) - 1/3\,(x^3) + o(x^3) = -x^3/3 + o(x^3)$$

$$f(x) \approx x^3 / -x^3/3 \to -3.$$

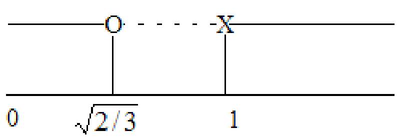
3.

C.E. R ; la funzione è pari e dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y. Possiamo limitarci a studiare la funzione per $x \geq 0$: i calcoli successivi tengono conto di questa limitazione.

SGN La funzione è positiva, nulla per $x = 0$, $x = 1$.

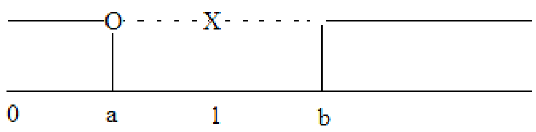
LIM Per $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$ (senza asintoto)

DRV $f'(x) = \mathrm{sgn}(x^2-1) \dfrac{3x^3 - 2x}{|x^2-1|^{1/2}}$, $x \neq 1$

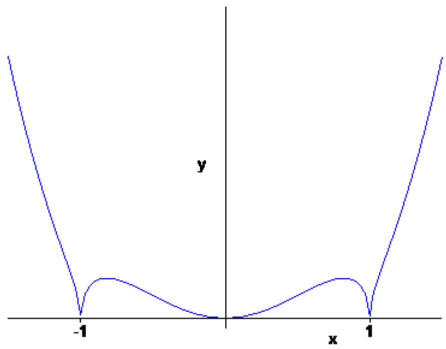


x = 1 punto di cuspide

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 9x^2 + 2}{\left| x^2 - 1 \right|^{3/2}}$$



$$a = \sqrt{(9 - \sqrt{33})/12}$$
$$b = \sqrt{(9 + \sqrt{33})/12}$$



4.

$$\operatorname{sen}(1/10) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(1/10)^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \cos\xi \frac{(1/10)^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

con $0 < \xi < 1/10$

$$|E_n| = \frac{|\cos\xi|}{10^{2n+3}(2n+3)!} < \frac{1}{10^{2n+3}(2n+3)!} < \frac{1}{10^7}$$

La maggiorazione è vera per $n \geq 1$.

$$\operatorname{sen}(1/10) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6 \cdot 10^3} \approx 0{,}099833 \ .$$

[fila 2]

1.

(a)

$$f(x) = (x^2)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)} = e^{\operatorname{tg}(\pi x/2)\log(x^2)}$$

Per $x \to 1$:

$$\operatorname{tg}(\pi x/2)\log(x^2) \approx \frac{x^2 - 1}{\cos(\pi x/2)} \approx \frac{2(x-1)}{\cos(\pi x/2)} \overset{=}{H} \frac{2}{-(\pi/2)\operatorname{sen}(\pi x/2)} \to -\frac{4}{\pi}$$

La funzione può essere prolungata con continuità, ponendo $f(1) = e^{-4/\pi}$.

(b)

$$f\,'(x) = (x^2)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)} \left\{ \frac{(\pi/2)\log(x^2)}{\cos^2(\pi x/2)} + \frac{2}{x}\operatorname{tg}(\pi x/2) \right\} =$$

$$= (x^2)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)} \left\{ \frac{\pi x \log|x| + \operatorname{sen}\pi x}{x\cos^2(\pi x/2)} \right\}$$

2.

$$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$$

$$e^{-x^2/2} = 1 - x^2/2 + x^4/8 + o(x^4)$$

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$$

$$\operatorname{sen}\log(1+x) = \operatorname{sen}(x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)) =$$

$$= (x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4) - \frac{1}{6}(x^3 - 3x^4/2) + o(x^4) =$$

$$= x - x^2/2 + x^3/6 + o(x^4)$$

$$f(x) \approx -x^4/6 \,/\, -x^4/12 \to 2.$$

3.

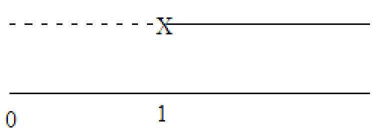
C.E. $\mathbb{R} - \{0\}$; la funzione è dispari e dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Possiamo limitarci a studiare la funzione per $x > 0$: i calcoli successivi tengono conto di questa limitazione.

SGN La funzione è positiva, nulla per $x = 1$.

LIM Per $x \to +\infty$ $f(x) \to 1$ (asintoto orizzontale)

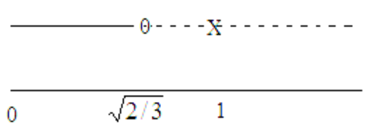
per $x \to 0^+$ $f(x) \to +\infty$ (asintoto verticale)

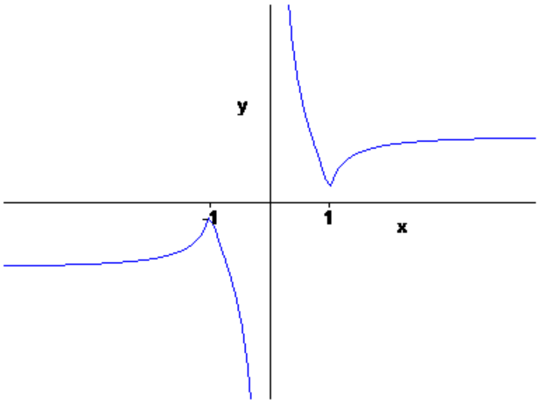
DRV $$f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)\,\frac{1}{x^2\,|x^2 - 1|^{1/2}}\ , \quad x \neq 1$$



$x = 1$ punto di cuspide

$$f''(x) = \frac{2 - 3x^2}{x^3\,|x^2 - 1|^{3/2}}$$





4.

$$\cos\left(1/10\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(1/10)^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \cos\xi \, \frac{(1/10)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

con $0 < \xi < 1/10$

$$|E_n| = \frac{|\cos\xi|}{10^{2n+2}(2n+2)!} < \frac{1}{10^{2n+2}(2n+2)!} < \frac{1}{10^7}$$

La maggiorazione è vera per $n \geq 2$.

$$\cos(1/10) \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{24 \cdot 10^4} \approx 0{,}995004 \ .$$

[fila 3]

1.

(a)

$$f(x) = (x)^{1/\mathrm{tg}(\pi/2 - x)} = e^{\log x \,/\, \mathrm{tg}(\pi/2 - x)}$$

Per $x \to 0$ $\quad \dfrac{\log x}{\mathrm{tg}(\pi/2 - x)} \underset{H}{=} \dfrac{1/x}{-1/\cos^2(\pi/2 - x)} = \dfrac{-\cos^2(\pi/2 - x)}{x} =$

$$= -\frac{\mathrm{sen}^2 x}{x} \to 0$$

La funzione può essere prolungata con continuità, ponendo f (0) =1.

(b)

$$f'(x) = (x)^{1/\mathrm{tg}(\pi/2 - x)} \frac{\frac{1}{x}\,\mathrm{tg}(\pi/2 - x) + \dfrac{\log x}{\cos^2(\pi/2 - x)}}{\mathrm{tg}^2(\pi/2 - x)} = \ldots. =$$

$$= (x)^{\mathrm{tg}\, x} \frac{\mathrm{sen}\, 2x - 2x \log x}{2x \cos^2 x} \ .$$

2.

$$\text{sen}^3 x \;=\; (\, x - x^3/6 + x^5/120 + o\,(x^6)\,)\,) = \; x^3 - x^5/2 \;+\; o\,(\, x^6\,)$$

$$\log(\,1 \;+\; \text{senx}\,) \;=\; \log\,(\,1 + x - x^3/\,6 \;+\; o\,(\,x^3\;)\;=\;(\,x - x^3/\,6\,) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\,(\,x^3\,) =$$

$$=\; x - \,x^2/\,2 + x^3/\,6 + o\,(\,x^3\,)$$

$$\sqrt{1 - x} \;=\; 1 - x/2 \;-x^2/8 \;+ o\,(\,x^2\,)$$

$$f\,(\,x\,) \;\approx\; (\,x^5/\,2\,)\,/\,(\,7x^4/\,24\,) \;\to\; 0.$$

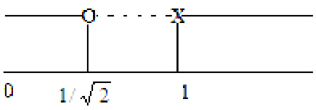
3.

C.E. R ; la funzione è dispari e dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all’origine. Possiamo limitarci a studiare la funzione per $x \geq 0$: i calcoli successivi tengono conto di questa limitazione.

SGN La funzione è positiva, nulla per $x = 0$, $x = 1$.

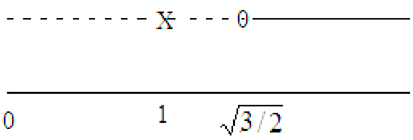
LIM Per $x \to +\infty$ $\quad f\,(\,x\,) \to +\infty$ (senza asintoto)

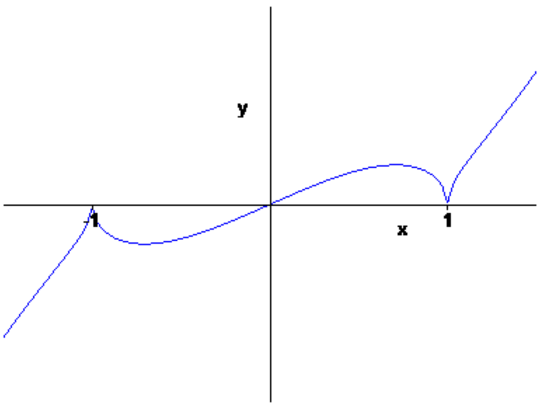
DRV $$f'\,(\,x\,) \;=\; \text{sgn}\,(\,x^2 - 1\,)\;\frac{2\,x^2 - 1}{\left|x^2 - 1\right|^{1/2}} \quad , \quad x \neq 1$$



x = 1 punto di cuspide

$$f''\,(\,x\,) \;=\; \frac{x\,(\,2\,x^2 - 3\,)}{\left|x^2 - 1\right|^{3/2}}$$





4.

$$e^{1/5} \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{n} \frac{1}{k\,!\;5^k} \;+\; e^{\xi}\;\frac{1}{(\,n \;+\; 1\,)\,!\;\;5^{n\,+\,1}}$$

con $0 < \xi < 1/5$

$$\left| E_n \right| = \frac{e^{\xi}}{5^{n+1}(n+1)!} < \frac{3}{5^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10^4}$$

La maggiorazione è vera per $n \geq 3$.

$$e^{1/5} \approx 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} \approx 1{,}221 \ .$$