Prova scritta parziale n.2 del 22. 12. 2006

Soluzioni

[1]

1.

Sostituendo $i^6 = -1$ e $i^7 = -i$ e ponendo $z = x + i\,y$, si ottiene :

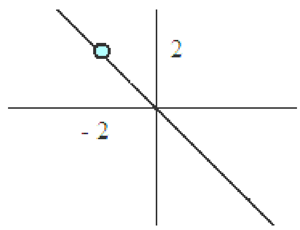
$$w = \frac{-z}{z + 2 - 2i} = \frac{-x - i\,y}{(x+2) + i\,(y-2)} \;.$$

Perché il rapporto abbia senso, deve essere $z \neq -2 + 2i$.
Moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore, si ottiene

$$\frac{(-x - i\,y)\,[\,(x+2) - i\,(y-2)\,]}{(x+2)^2 + (y-2)^2} =$$

$$\frac{-x\,(x+2) - y\,(y-2)}{(x+2)^2 + (y-2)^2} + i\,\frac{-2y - 2x}{(x+2)^2 + (y-2)^2} \;.$$

Perché questo numero sia reale, imponiamo che la sua parte immaginaria sia nulla; in questo modo si ottiene che deve essere $y = -x$.



2.

(i)

$$\mathrm{sen}\sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \sim \mathrm{sen}\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$$

$$\log(1 + \sqrt{x} + \mathrm{sen}x) \sim \log(1 + \sqrt{x} + x) \sim \log(1 + \sqrt{x}\,) \sim \sqrt{x}$$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \to 1$$

(ii)

$$x_n = \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + n + 2}\right)^n = e^{\,n \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+n+2}\right)}$$

$$\frac{n^2+3}{n^2+n+2} \sim \frac{n^2}{n^2} \to 1$$

Il logaritmo di una quantità che tende a 1 si può approssimare con questa quantità diminuita di 1 :

$$n \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+n+2}\right) \sim n\left(\frac{n^2+3}{n^2+n+2} - 1\right) = n\left(\frac{1-n}{n^2+n+2}\right) \sim \frac{-n^2}{n^2} \to -1.$$

Dunque

$$x_n \to e^{-1}.$$

3.

Poiché $f(x) = \log e - \log\log x = 1 - \log\log x$, dobbiamo far vedere che è

$$1 - \varepsilon < 1 - \log\log x < 1 + \varepsilon$$

per x in un opportuno intorno di e . Possiamo successivamente riscrivere le due disequazioni in modo equivalente :

$$-\varepsilon < -\log\log x < \varepsilon \quad \text{cioè} \quad -\varepsilon < \log\log x < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-\varepsilon} < \log x < e^{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad e^{e^{-\varepsilon}} < x < e^{e^{\varepsilon}}$$

Rimane da far vedere che quello trovato è un intorno di e , cioè che

$$e^{e^{-\varepsilon}} < e < e^{e^{\varepsilon}}$$

e questo segue dal fatto che è

$$e^{-\varepsilon} < 1 < e^{\varepsilon}.$$

4.

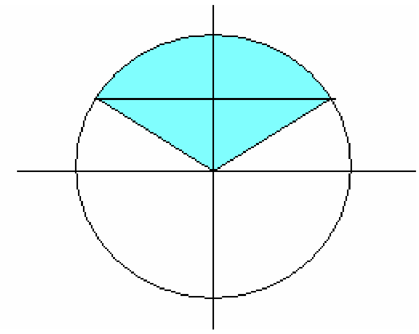
Le condizioni per il campo di esistenza della funzione sono

$$\frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} 2x} > 0 \quad , \quad \operatorname{sen} 2x \neq 0.$$

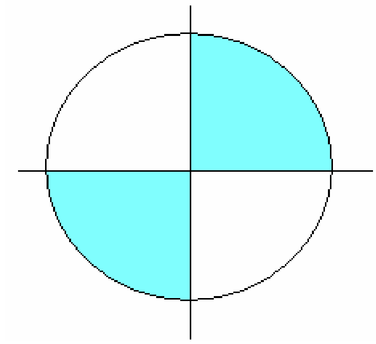
Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore :

$$2 \text{ sen } x \geq 1 \Leftrightarrow \text{sen } x \geq 1/2 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

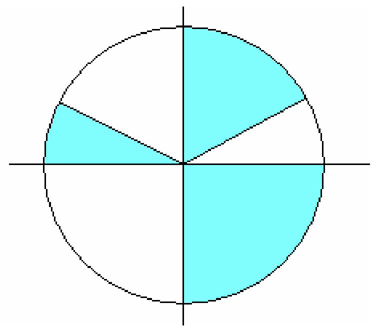
$$\text{sen } 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi \Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$$



numeratore



denominatore



$\pi/6 < x < \pi/2$, $5\pi/6 < x < \pi$, $3\pi/2 < x < 2\pi$

$+ 2k\pi$

Prova scritta parziale n.2 del 22. 12. 2006

Soluzioni

[2]

1.

Sostituendo $i^3 = -i$ e $i^6 = -1$ e ponendo $z = x + i\,y$, si ottiene :

$$w = \frac{z}{-i\,z - 1} = \frac{x + i\,y}{(y - 1) - i\,x} \ .$$

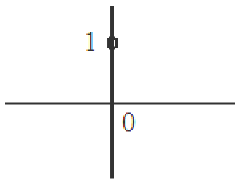
Perché il rapporto abbia senso, deve essere $z \neq i$.

Moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore, si ottiene

$$\frac{(x + i\,y)\,[\,(y - 1) + i\,x\,]}{x^2 + (y - 1)^2} =$$

$$\frac{-x}{x^2 + (y - 1)^2} + i\,\frac{x^2 + y\,(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2} .$$

Perché questo numero sia immaginario puro, imponiamo che la sua parte reale sia nulla; in questo modo si ottiene che deve essere $x = 0$.



2.

(i)

$$e^{\sqrt{x + x^2}} - 1 \sim e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x}$$

$$\log(\operatorname{tg} 4x) - \log x = \log\frac{\operatorname{tg} 4x}{x} \sim \log\frac{4x}{x} \sim \log 4$$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\log 4} \to \frac{1}{\log 4}$$

(ii)

$$x_n = \left(\frac{2\,n^2 + n}{2\,n^2 + 1}\right)^n = e^{\,n \log\left(\frac{2\,n^2 + n}{2\,n^2 + 1}\right)}$$

$$\frac{2n^2+n}{2n^2+1} \sim \frac{2n^2}{2n^2} \to 1$$

Il logaritmo di una quantità che tende a 1 si può approssimare con questa quantità diminuita di 1 :

$$n \log\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+1}\right) \sim n\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+1} - 1\right) = n\left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right) \sim \frac{n^2}{2n^2} \to \frac{1}{2}.$$

Dunque

$$x_n \to \sqrt{e}\ .$$

3.

Poiché $f(x) = \log 1 - \log\log(e+x) = -\log\log(e+x)$, dobbiamo far vedere che è

$$-\varepsilon < -\log\log(e+x) < \varepsilon \quad \text{cioè} \quad -\varepsilon < \log\log(e+x) < \varepsilon$$

per x in un opportuno intorno di 0 . Possiamo successivamente riscrivere le due disequazioni in modo equivalente :

$$e^{-\varepsilon} < \log(x+e) < e^{\varepsilon} \iff e^{e^{-\varepsilon}} < x+e < e^{e^{\varepsilon}} \iff e^{e^{-\varepsilon}} - e < x < e^{e^{\varepsilon}} - e$$

Rimane da far vedere che quello trovato è un intorno di e , cioè che

$$e^{e^{-\varepsilon}} - e < 0 < e^{e^{\varepsilon}} - e \quad \text{cioè} \quad e^{e^{-\varepsilon}} < e < e^{e^{\varepsilon}}$$

e questo segue dal fatto che è

$$e^{-\varepsilon} < 1 < e^{\varepsilon}.$$

4.

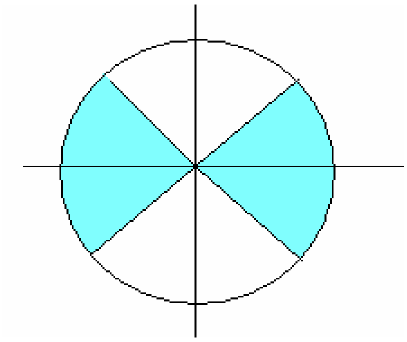
Le condizioni per il campo di esistenza della funzione sono

$$\frac{\cos 2x}{2\cos x - 1} \geq 0 \quad , \quad 2\cos x - 1 \neq 0.$$

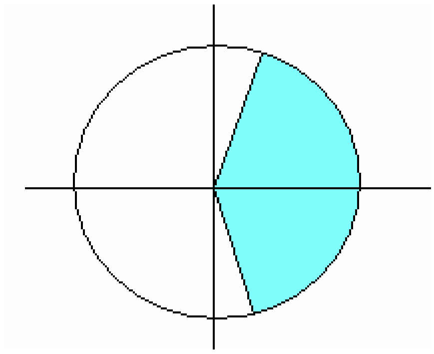
Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore :

$$\cos 2x \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

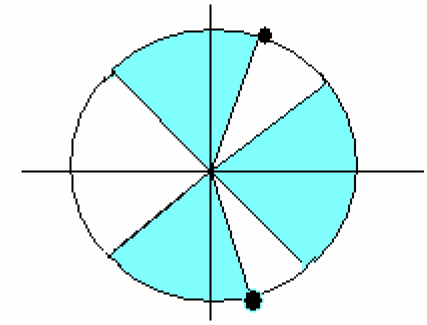
$$2\cos x - 1 \geq 0 \iff -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$



numeratore



denominatore



$$-\pi/4 \le x \le \pi/4 \quad , \quad \pi/3 < x \le 3\pi/4$$
$$5\pi/4 \le x \le 5\pi/3$$

$+ 2k\pi$

Prova scritta parziale n.2 del 22. 12. 2006

Soluzioni

[3]

1.

Sostituendo $i^6 = -1$ e $i^7 = -i$ e ponendo $z = x + i\,y$, si ottiene :

$$w = \frac{-z}{z - 2 - 2i} = \frac{-x - i\,y}{(x-2) + i\,(y-2)} \;.$$

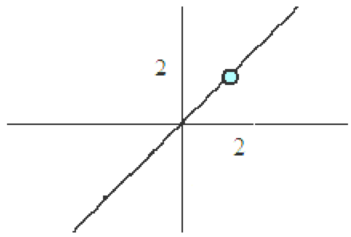
Perché il rapporto abbia senso, deve essere $z \neq 2 + 2i$.

Moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore, si ottiene

$$\frac{(-x - i\,y)\,[\,(x-2) - i\,(y-2)\,]}{(x-2)^2 + (y-2)^2} =$$

$$\frac{-x\,(x-2) - y\,(y-2)}{(x-2)^2 + (y-2)^2} + i\,\frac{2y - 2x}{(x-2)^2 + (y-2)^2} \,.$$

Perché questo numero sia reale, imponiamo che la sua parte immaginaria sia nulla; in questo modo si ottiene che deve essere $y = x$.



2.

(i)

$$\log\left(1 + \sqrt{1 - \cos x}\right) \sim \log\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sim \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$1 - e^{\,\mathrm{sen}^2 3x} \sim 1 - e^{\,9x^2} \sim -9x^2$$

$$f(x) \sim \frac{x/\sqrt{2}}{-9x^2} \to -\infty$$

(ii)

$$x_n = \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 - 3n + 1}\right)^n = e^{\,n \log\left(\frac{n^2+2}{n^2 - 3n + 1}\right)}$$

$$\frac{n^2+2}{n^2-3n+1} \sim \frac{n^2}{n^2} \to 1$$

Il logaritmo di una quantità che tende a 1 si può approssimare con questa quantità diminuita di 1 :

$$n \log\left(\frac{n^2+2}{n^2-3n+1}\right) \sim n\left(\frac{n^2+2}{n^2-3n+1} - 1\right) = n\left(\frac{3n+1}{n^2-3n+1}\right) \sim \frac{3n^2}{n^2} \to 3.$$

Dunque

$$x_n \to e^3.$$

3.

Poiché $f(x) = -1/2 \log(x+1)$, dobbiamo far vedere che è

$$-\varepsilon < -1/2 \log(x+1) < \varepsilon \quad \text{cioè} \quad -2\varepsilon < \log(x+1) < 2\varepsilon$$

per x in un opportuno intorno di 0 . Possiamo successivamente riscrivere le due disequazioni in modo equivalente :

$$e^{-2\varepsilon} < 1 + x < e^{2\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\varepsilon} - 1 < x < e^{2\varepsilon} - 1$$

Rimane da far vedere che quello trovato è un intorno di 0 , cioè che

$$e^{-2\varepsilon} - 1 < 0 < e^{2\varepsilon} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\varepsilon} < 1 < e^{2\varepsilon}$$

e questo segue dal fatto che è $\varepsilon > 0$.

4.

Le condizioni per il campo di esistenza della funzione sono

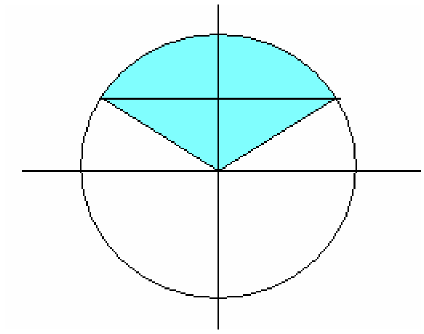
$$\frac{\text{sen } x - \cos 2x}{\text{tg } 2x} > 0 \quad , \quad \text{tg } 2x \neq 0.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore :

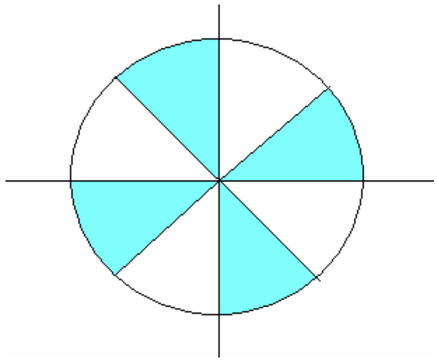
$$\text{sen } x - \cos 2x = 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \text{sen } x \leq -1 \text{ opp } \text{sen } x \geq 1/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ opp } x = \frac{3\pi}{2}$$

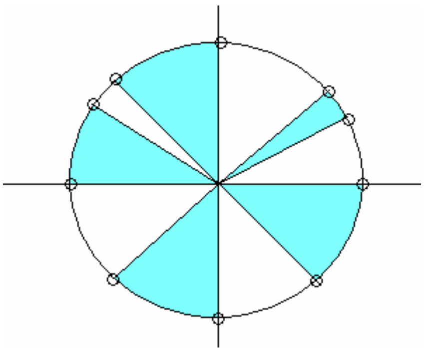
$$\text{tg } 2x \geq 0 \Leftrightarrow k\pi \leq 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow k\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



numeratore



denominatore



$\pi / 6 < x < \pi/4$, $\pi / 2 < x < 3\pi / 4$, $5\pi / 6 < x < \pi$

$5\pi / 4 < x < 3\pi/2$, $7\pi / 4 < x < 2\pi$

$+ 2 k \pi$

Prova scritta parziale n.2 del 22. 12. 2006

Soluzioni

[4]

1.

Sostituendo $i^3 = -i$ e $i^6 = -1$ e ponendo $z = x + i\, y$, si ottiene :

$$w = \frac{z}{-i\, z - 5} = \frac{x + i\, y}{(y - 5) - i\, x} \; .$$

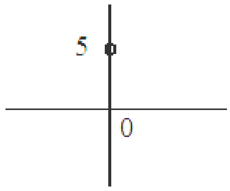
Perché il rapporto abbia senso, deve essere $z \neq 5i$.

Moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore, si ottiene

$$\frac{(x + i\, y)\,[\,(y - 5) + i\, x\,]}{x^2 + (y - 5)^2} =$$

$$\frac{-5\, x}{x^2 + (y - 5)^2} + i\, \frac{x^2 + y\,(y - 5)}{x^2 + (y - 5)^2} .$$

Perché questo numero sia immaginario puro, imponiamo che la sua parte reale sia nulla; in questo modo si ottiene che deve essere $x = 0$.



2.

(i)

$$\text{sen}\, \sqrt{x^2 + x^4} \;\square\; \text{sen}\, x \;\square\; x$$

$$x\, \left[2 \log x - \log(1 - \cos x)\right] \;\square\; x\, \left[2 \log x - \log(x^2/2)\right] = x \log 2$$

$$f(x) \;\square\; \frac{x}{x \log 2} \to \frac{1}{\log 2}$$

(ii)

$$x_n = \left(\frac{2\, n^2 + 1}{2\, n^2 - 3\, n + 2}\right)^n = e^{\, n \log \left(\frac{2\, n^2 + 1}{2\, n^2 - 3\, n + 2}\right)}$$

$$\frac{2\, n^2 + 1}{2\, n^2 - 3\, n + 2} \;\square\; \frac{2\, n^2}{2\, n^2} \to 1$$

Il logaritmo di una quantità che tende a 1 si può approssimare con questa quantità diminuita di 1 :

$$n \log \left(\frac{2\,n^2 + 1}{2\,n^2 - 3\,n + 2} \right) \approx n \left(\frac{2\,n^2 + 1}{2\,n^2 - 3\,n + 2} - 1 \right) = n \left(\frac{3\,n}{2\,n^2 - 3\,n + 2} \right)$$

$$\approx \frac{3\,n^2}{2\,n^2} \to \frac{3}{2}.$$

Dunque

$$x_n \to e^{3/2}.$$

3.

Poiché $f(x) = \log 1 - \log\log x = -\log\log x$, dobbiamo far vedere che è

$$-\varepsilon < -\log\log x < \varepsilon \quad \text{cioè} \quad -\varepsilon < \log\log x < \varepsilon$$

per x in un opportuno intorno di e . Possiamo successivamente riscrivere le due disequazioni in modo equivalente :

$$e^{-\varepsilon} < \log x < e^{\varepsilon} \iff e^{e^{-\varepsilon}} < x < e^{e^{\varepsilon}} .$$

Rimane da far vedere che quello trovato è un intorno di e , cioè che

$$e^{e^{-\varepsilon}} < e < e^{e^{\varepsilon}}$$

e questo segue dal fatto che è

$$e^{-\varepsilon} < 1 < e^{\varepsilon} .$$

4.

Le condizioni per il campo di esistenza della funzione sono

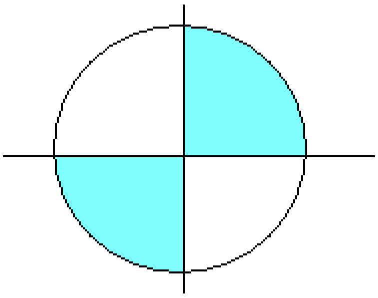
$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x + \cos x} \geq 0 \quad , \quad \operatorname{sen} 2x + \cos x \neq 0.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore :

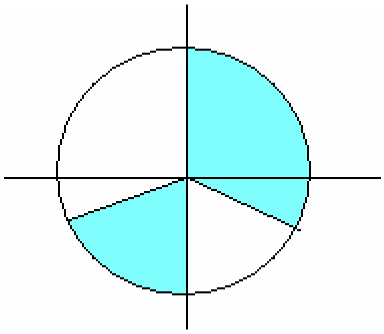
$$\operatorname{tg} x \geq 0 \iff k\,\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

$$\operatorname{sen} 2x + \cos x = (2 \operatorname{sen} x + 1) \cos x \geq 0$$

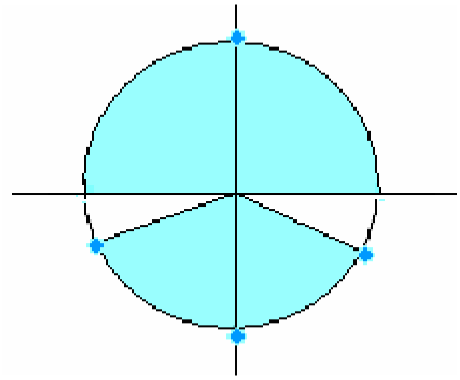
$$\iff -\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{opp} \ \frac{7\pi}{6} + 2\,k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$



numeratore



denominatore



$$0 \le x < \pi/2 \;,\; \pi/2 < x \le \pi \;,\; 7\pi/6 < x < 3\pi/2 \;,\; 3\pi/2 < x < 2\pi \;.$$

\ $+ 2k\pi$