Prova scritta del 7 giugno 2006-06-05

Soluzioni (fila 1)

1. $\log(1+x^2) \sim x^2 - x^4/2$ $\quad$ $\mathrm{sen}^2 x \sim x^2 - x^4/3$

   $\cos x \sim 1 - x^2/2 + x^4/24$ $\quad$ $\exp(-x^2/2) \sim 1 - x^2/2 + x^4/8$

   $$f(x) \sim \frac{x^4/6}{-x^4/12} \to -2$$

2. Equazione in forma standard : $y' = \dfrac{2x+5}{x^3+6x^2+25x}(1+y^2)\,\mathrm{arctg}\, y$

   L'equazione è definita per $x \neq 0$ e per y reale .
   La funzione $y = 0$ è soluzione costante. Per trovare le altre soluzioni procediamo con il metodo consueto :

   $$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{(1+s^2)\,\mathrm{arctg}\, s} = \int_{x_0}^{x} \frac{2s+5}{s^3+6s^2+25s}\,ds .$$

   Calcoliamo gli integrali:

   $$\int \frac{ds}{(1+s^2)\,\mathrm{arctg}\, s} = \log|\mathrm{arctg}\, s| + c \quad (\text{si pone } \mathrm{arctg}\, s = t,\ ds/(1+s^2) = dt)$$

   $$\int \frac{2s+5}{s^3+6s^2+25}\,ds = \int \left(\frac{1}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{s-4}{s^2+6s+25} \right) ds = \quad \text{(abbiamo applicato Hermite)}$$

   $$= \frac{1}{5}\log|s| - \frac{1}{10}\int \frac{2s+6-14}{s^2+6s+25}\,ds =$$

   $$= \frac{1}{5}\log|s| - \frac{1}{10}\log(s^2+6s+25) + \frac{7}{5}\int \frac{ds}{(s+3)^2+16} =$$

   $$= \frac{1}{5}\log|s| - \frac{1}{10}\log(s^2+6s+25) + \frac{7}{80}\int \frac{ds}{((s+3)/4)^2+1} =$$

   $$= \frac{1}{5}\log|s| - \frac{1}{10}\log(s^2+6s+25) + \frac{7}{20}\,\mathrm{arctg}\,\frac{s+3}{4} + c$$

   Otteniamo così

   $$\log|\mathrm{arctg}\, y| = \frac{1}{5}\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+6x+25}} + \frac{7}{20}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+3}{4} + c$$

da cui

$$y = \pm\, \mathrm{tg}\left(\exp\left(k + \frac{7}{20}\, \mathrm{arctg}\, \frac{x+3}{4} \right) \sqrt[10]{\frac{x^2}{x^2 + 6x + 25}} \right).$$

3.

La funzione è π -periodica (possiamo studiarla in [$-\pi/2$, $\pi/2$]) ed è pari (possiamo studiarla per $x \geq 0$) ; in definitiva la studiamo in [0 , $\pi/2$] (e quindi possiamo togliere il valore assoluto). La funzione è ovviamente positiva , in quanto somma di due quantità positive; poiché queste due quantità non si annullano contemporaneamente, la funzione non ha zeri.
Valori notevoli : $f(0) = f(\pi/2) = 1$.
Derivata : $f'(x) = \cos x\,(1 - 2\,\mathrm{sen}\,x)$

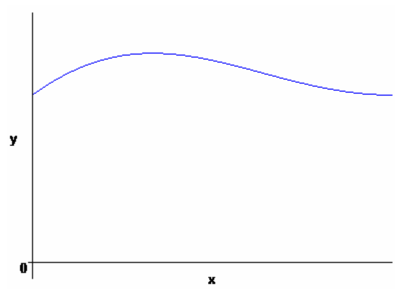
————————0--------------------0

0 $\pi/6$ $\pi/2$

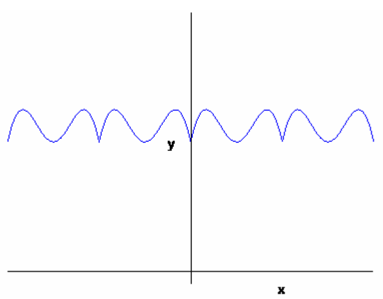
Derivata seconda : $f''(x) = -\mathrm{sen}\,x - 2\cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}^2 x = 4\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,x - 2$

-------------------------0——————

0 $\mathrm{arcsen}\left((1+\sqrt{33})/8\right)$ $\pi/2$



Nel ricostruire il grafico in tutto il dominio di definizione si formano dei punti angolosi per $x = k\pi$



4.

Se $x > 2$, $a_n \approx n^x / n^3 = (1/n)^{3-x}$; poiché per $x > 2$ risulta $3 - x < 1$, la serie diverge.
Se $x < 2$, $a_n \approx n^2 / n^3 = 1/n$; la serie diverge.
Se $x = 2$, $a_n \approx 2n^2 / n^3 = 2/n$; la serie diverge.

Soluzioni (fila 2)

1. $\exp(-x^4/2) \sim 1 - x^4/2 + x^8/4$ $\qquad \cos x^2 \sim 1 - x^4/2 + x^8/24$

$\log(1 + x^2/2) \sim x^2/2 - x^4/8$ $\qquad \operatorname{sen}(x^2/2) \sim x^2/2 - x^6/48$

$$f(x) \sim \frac{5x^8/24}{-x^4/8} \to 0$$

2.

Equazione in forma standard : $y' = \dfrac{x+2}{x^3 - 4x^2 + 8x}\sqrt{1-y^2}\ \operatorname{arcsen} y$.

L'equazione è definita per $x \neq 0$ e per y reale .

Le funzioni $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$ sono soluzioni costanti. Per trovare le altre soluzioni procediamo con il metodo consueto :

$$\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\ \operatorname{arcsen} s} = \log|\operatorname{arcsen} y| + c\ .$$

Calcoliamo gli integrali:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\ \operatorname{arcsen} s} = \log|\operatorname{arcsen} y| + c \qquad (\text{si pone } \operatorname{arcsen} s = t,\ ds/\sqrt{(1-s^2)} = dt)$$

$$\int \frac{s+2}{s^3 - 4s^2 + 8}\, ds = \int \left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\,\frac{s-8}{s^2 - 4s + 8} \right) ds = \quad \text{(abbiamo applicato Hermite)}$$

$$= \frac{1}{4}\log|s| - \frac{1}{8}\int \frac{2s - 4 - 12}{s^2 - 4s + 8}\, ds =$$

$$= \frac{1}{5}\log|s| - \frac{1}{8}\log(s^2 - 4s + 8) + \frac{3}{2}\int \frac{ds}{(s-2)^2 + 4} =$$

$$= \frac{1}{4}\log|s| - \frac{1}{8}\log(s^2 - 4s + 8) + \frac{3}{8}\int \frac{ds}{((s-2)/2)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4}\log|s| - \frac{1}{8}\log(s^2 - 4s + 8) + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + c$$

Otteniamo così

$$\log|\operatorname{arcsen} y| = \frac{1}{4}\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + c$$

da cui

$$y = \pm \operatorname{sen}\left(\exp\left(c + \tfrac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} \right) \sqrt[8]{\frac{x^2}{x^2 - 4x + 8}} \right).$$

3.

La funzione è π -periodica (possiamo studiarla in $[-\pi/2, \pi/2]$) ed è pari (possiamo studiarla per $x \geq 0$) ; in definitiva la studiamo in $[0, \pi/2]$ (e quindi possiamo togliere il valore assoluto). La funzione è ovviamente positiva , in quanto somma di due quantità positive; poiché queste due quantità non si annullano contemporaneamente, la funzione non ha zeri.
Valori notevoli : $f(0) = f(\pi/2) = 1$.
Derivata : $f'(x) = \operatorname{sen} x\,(2\cos x - 1)$

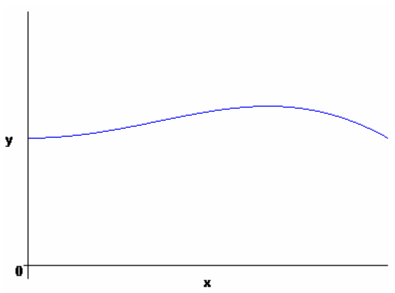
————————0-------------------0

0 $\pi/3$ $\pi/2$

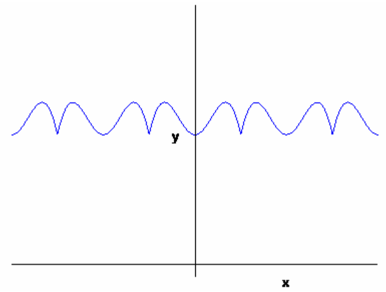
Derivata seconda : $f''(x) = -\cos x + 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x - \cos x - 2$

——————0---------------------------

0 $\arccos\left((1+\sqrt{33})/8\right)$ $\pi/2$



Nel ricostruire il grafico in tutto il dominio di definizione si formano dei punti angolosi per $x = \pi/2 + k\,\pi$.



4.

Se $x > 3$, $a_n \approx n^x / n^4 = (1/n)^{4-x}$; poiché per $x > 3$ risulta $4 - x < 1$, la serie diverge.
Se $x < 3$, $a_n \approx n^3 / n^4 = 1/n$; la serie diverge.
Se $x = 3$, $a_n \approx 2\,n^3 / n^4 = 2/n$; la serie diverge.