Soluzioni della prova scritta parziale n.3 del 4. 4. 06 - Fila 2

1.

$$\exp(x^2/2) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$
$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$
$$(\operatorname{sen} 2x)^2 = (2x - 4x^3/3 + o(x^4))^2 = 4x^2 - 16x^4/3 + o(x^4)$$
$$\log(1 + 4x^2) = 4x^2 - 8x^4 + o(x^4)$$
$$f(x) \approx \frac{-x^4/4}{8x^4/3} \to -3/32$$

2.

Dobbiamo calcolare il limite per $x \to 0$ da entrambe le direzioni :

$$(x + \cos x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\log(x + \cos x)}{x}\right) \approx \exp\left(\frac{x + \cos x - 1}{x}\right) \approx \exp\left(\frac{x}{x}\right) \to e$$
$$e\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \to e.$$

La funzione si può prolungare con continuità in $x = 0$, definendo $f(0) = e$.

La derivata per $x \neq 0$ è data da :

$$f'(x) = \begin{cases} -e\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,\dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ (x+\cos x)^{1/x}\,\dfrac{\dfrac{(1-\operatorname{sen} x)\,x}{x+\cos x} - \log(x+\cos x)}{x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Per vedere se esiste anche per $x = 0$, dobbiamo calcolare il limite della derivata per $x \to 0$ da entrambe le direzioni ; quello da sinistra vale $-e$. Per calcolare quello da destra, utilizzeremo il teorema dell'Hôpital , dopo aver sostituito i fattori $(x + \cos x)^{1/x}$ e (al denominatore comune) $x + \cos x$ con i loro limiti **e** ed 1.

Per $x \to 0^+$

$$e\,\frac{(1-\operatorname{sen} x)\,x - (x+\cos x)\log(x+\cos x)}{x^2} \underset{H}{=}$$

$$e^{\frac{-x\cos x - (1-\operatorname{sen} x)\log(x+\cos x)}{2x}} \underset{H}{=}$$

$$e^{\frac{x \operatorname{sen} x - \cos x + \cos x \; \log(x+\cos x) - \frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{x+\cos x}}{2}} \to -e \,.$$

$$\to -e$$

Nel punto x = 0 la funzione è derivabile e f ' (0) = - e .

3.

La funzione è pari ed ha periodo π : basterà dunque studiarla per $0 \le x \le \pi / 2$.

C.E. $\quad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x > 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x > 0 \Leftrightarrow -1/\sqrt{2} < \operatorname{sen} x < 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$x \in [\,0 , \pi/4\,)$

SGN $\quad f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \ge 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \ge 1 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x \ge 0$
La funzione è sempre negativa , eccetto che per $x = \pi / 2$ in cui si annulla.

LIM $\quad$ per $x \to \pi / 4 \quad f(x) \to -\infty$

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{-4 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$.

Nel C.E. la derivata è sempre negativa ; si annulla per x = 0 . Dunque nel suo CE la funzione è decrescente ed assume valore massimo per x = 0 .

DRV ^{2} $\quad f''(x) = -4 \dfrac{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{(\cos^2 x - \operatorname{sen} x^2)^2}$

La derivata seconda è sempre negativa e dunque la funzione è concava.