Soluzioni della prova parziale n.2 del 19 . 12 . 05 *Fila 1*

1.

- Per induzione si prova che è $x_n > 0 \ \forall n$ . In particolare questo dimostra che la successione è ben definita.
- $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \sqrt{9+4a_n} \geq a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 4a_n - 9 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a_n \leq 2+\sqrt{13}$
- Per induzione si prova che è $a_n < 2+\sqrt{13} \quad \forall n$ .
- In conclusione , la successione è crescente e limitata e dunque ammette limite reale L .
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva , si trova che deve essere $L = \sqrt{9+4L}$ e dunque $L = 2+\sqrt{13}$ .

2.

$$\log(1+\sqrt{x+x^3}) \approx \sqrt{x+x^3} \approx \sqrt{x}$$

$$\log x - \log \operatorname{sen} 2x = \log \frac{x}{\operatorname{sen} 2x} \approx \log \frac{x}{2x} = -\log 2$$

$$f(x) \approx -\frac{\sqrt{x}}{\log 2 \ \sqrt{x}} \to -\frac{1}{\log 2}$$

3.

Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A, \ x > M \Rightarrow 1-\varepsilon < \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x} < 1+\varepsilon$ .

Poiché $A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, possiamo supporre che sia $x > 1$ ; possiamo inoltre limitarci a far variare $\varepsilon$ in modo che sia $0 < \varepsilon < 1$.

Riscriviamo le disequazioni nella forma $(1-\varepsilon)x < \sqrt{x^2-x} < (1+\varepsilon)x$ .

La disequazione $\sqrt{x^2-x} < (1+\varepsilon)x$ è sempre verificata , perché $\sqrt{x^2-x} < x < (1+\varepsilon)x$ .

L'altra disequazione , elevando al quadrato e semplificando , equivale a $(2\varepsilon-\varepsilon^2)x^2 - x > 0$ ed è verificata per $x > 1/(2\varepsilon - \varepsilon^2)$ ( oltre che per $x < 0$ , ma queste soluzioni non ci interessano ) .

Poiché $1/(2\varepsilon - \varepsilon^2) > 1$ , nella definizione di limite sceglieremo $M = 1/(2\varepsilon - \varepsilon^2)$ .

4.

Scritto w nella forma $r \exp(i\theta)$ , deve essere $r^7 \exp(i(5\theta + \pi/2)) = \sqrt{2} \ \exp(-i\pi/4)$ e dunque $r^7 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[14]{2}$ , $5\theta = -3\pi/4 + 2k\pi \Rightarrow \theta = -3\pi/20 + 2k\pi/5 \ (k = 0, \dots, 4)$ .

Soluzioni della prova parziale n.2 del 19 . 12 . 05 *Fila 2*

1.

- Per induzione si prova che è $x_n > 0 \ \forall n$ . In particolare questo dimostra che la successione è ben definita.
- $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \sqrt{3+2a_n} \geq a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 3a_n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a_n \leq (3+\sqrt{17})/2$
- Per induzione si prova che è $a_n < (3+\sqrt{17})/2 \ \forall n$ .
- In conclusione , la successione è crescente e limitata e dunque ammette limite reale L .
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva , si trova che deve essere $L = \sqrt{3L+2}$ e dunque $L = (3+\sqrt{17})/2$.

2.

$\exp(\sqrt{x+x^2}) - 1 \approx \exp(\sqrt{x}) - 1 \approx \sqrt{x}$

$\log \operatorname{tg} 4x - \log x = \log \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} \approx \log \frac{4x}{x} = \log 4$

$f(x) \approx -\frac{\sqrt{x}}{\log 4 \sqrt{x}} \to -\frac{1}{\log 4}$

3.

Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A, \ x > M \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}} < 2 + \varepsilon$.

Poiché $A = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ , possiamo supporre che sia $x > 0$ ; possiamo inoltre limitarci a far variare $\varepsilon$ in modo che sia $0 < \varepsilon < 2$ .

Riscriviamo le disequazioni nella forma $(2-\varepsilon)\sqrt{x^2+x} < 2x < (2+\varepsilon)\sqrt{x^2+x}$ .

La disequazione $(2+\varepsilon)\sqrt{x^2+x} > 2x$ è sempre verificata , perché $\sqrt{x^2+x} > x$ . L'altra disequazione, elevando al quadrato e semplificando, equivale a $(4\varepsilon - \varepsilon^2)x^2 - (4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2)x > 0$ ed è verificata per $x > (4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2)/(4\varepsilon - \varepsilon^2)$ ( oltre che per $x < 0$ , ma queste soluzioni non ci interessano ) .
Poiché $(4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2)/(4\varepsilon - \varepsilon^2) > 0$ , sceglieremo $M = (4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2)/(4\varepsilon - \varepsilon^2)$ nella definizione di limite.

4.

Scritto w nella forma $r \exp(i\theta)$ , deve essere $r^{11} \exp(i(-7\theta + \pi/2)) = \sqrt{2} \exp(i\pi/4)$ e dunque $r^{11} = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[22]{2}$ , $-7\theta + \pi/2 = \pi/4 + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pi/28 + 2k\pi/7$ $(k = 0, \dots, 6)$ .

Soluzioni della prova parziale n.2 del 19 . 12 . 05 *Fila 3*

1.

- Per induzione si prova che è $x_n > 0 \ \forall n$. In particolare questo dimostra che la successione è ben definita.
- $a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow \sqrt{5+3a_n} \le a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 3a_n - 5 \ge 0 \Leftrightarrow a_n \ge (3+\sqrt{29})/2$
- Per induzione si prova che è $a_n > (3+\sqrt{29})/2 \quad \forall n$.
- In conclusione , la successione è decrescente e limitata e dunque ammette limite reale L .
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva , si trova che deve essere $L = \sqrt{5+3L}$ e dunque $L = (3+\sqrt{29})/2$ .

2.

$$\operatorname{sen}\sqrt{x^2+x^4} \approx \operatorname{sen}\sqrt{x^2} \approx |x| = x$$

$$2\log x - \log(1-\cos x) = \log\frac{x^2}{1-\cos x} \approx \log\frac{x^2}{x^2/2} \to \log 2$$

$$f(x) \approx \frac{x}{\log 2 \quad x} \to \frac{1}{\log 2}$$

3.

Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A ,\ x > M \Rightarrow 2-\varepsilon < \dfrac{\sqrt{4x^2-x}}{x} < 2+\varepsilon$ .

Poiché $A = (-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$ , possiamo supporre che sia $x > 4$ ; possiamo inoltre limitarci a far variare $\varepsilon$ in modo che sia $0 < \varepsilon < 2$.

Riscriviamo le disequazioni nella forma $(2-\varepsilon)x < \sqrt{4x^2-x} < (2+\varepsilon)x$ .

La disequazione $\sqrt{4x^2-x} < (2+\varepsilon)x$ è sempre verificata , perché $\sqrt{4x^2-x} < 2x < (2+\varepsilon)x$ .

L'altra disequazione , elevando al quadrato e semplificando , equivale a $(4\varepsilon-\varepsilon^2)x^2 - x > 0$ ed è verificata per $x > 1/(4\varepsilon-\varepsilon^2)$ ( oltre che per $x < 0$ , ma queste soluzioni non ci interessano ) .

Poiché $1/(4\varepsilon-\varepsilon^2) > 4$ , nella definizione di limite sceglieremo $M = 1/(2\varepsilon-\varepsilon^2)$ .

4.

Scritto w nella forma $r \exp(i\theta)$ , deve essere $2r^8 \exp(i(4\theta+\pi/6)) = \exp(i\,3\pi/2)$ e dunque

$2r^8 = 1 \Rightarrow r = 1/\sqrt[8]{2}$ , $4\theta + \pi/6 = 3\pi/2 + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pi/3 + k\pi/2 \ (k = 0, \dots, 3)$ .

Soluzioni della prova parziale n.2 del 19 . 12 . 05 <u>*Fila 4*</u>

1.

- Per induzione si prova che è $x_n > 0 \ \forall n$ . In particolare questo dimostra che la successione è ben definita.
- $a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow \sqrt{5 a_n + 4} \le a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 3 a_n - 5 \ge 0 \Leftrightarrow a_n \ge (5 + \sqrt{41})/2$
- Per induzione si prova che è $a_n > (5 + \sqrt{41})/2 \quad \forall n$ .
- In conclusione , la successione è decrescente e limitata e dunque ammette limite reale L .
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva , si trova che deve essere $L = \sqrt{5 + 3L}$ e dunque $L = (5 + \sqrt{41})/2$ .

2.

$$\mathrm{tg}(x + x^2) \approx \mathrm{tg}\, x \approx x$$

$$\log x - \log(e^{2x} - 1) = \log \frac{x}{e^{2x} - 1} \approx \log \frac{x}{2x} \to -\log 2$$

$$f(x) \approx \frac{x}{-\log 2 \ \ x} \to -\frac{1}{\log 2} .$$

3.

Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A , \ x > M \Rightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x}} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ .

Poiché $A = (-\infty, -1/4) \cup (0, +\infty)$ , possiamo supporre che sia $x > 0$ ; possiamo inoltre limitarci a far variare $\varepsilon$ in modo che sia $0 < \varepsilon < 1/2$ .

Riscriviamo le disequazioni nella forma $(1/2 - \varepsilon)\sqrt{4x^2 + x} < x < (1/2 + \varepsilon)\sqrt{4x^2 + x}$ .

La disequazione $(1/2 + \varepsilon)\sqrt{4x^2 + x} > x$ è sempre verificata , perché $\sqrt{4x^2 + x} > 2x$ . L'altra disequazione, elevando al quadrato e semplificando, equivale a $4(\varepsilon - \varepsilon^2)x^2 - (1/4 - \varepsilon + \varepsilon^2)x > 0$ ed è verificata per $x > (1/4 - \varepsilon + \varepsilon^2) / 4(\varepsilon - \varepsilon^2)$ ( oltre che per $x < 0$ , ma queste soluzioni non ci interessano ) .

Poiché $(1/4 - \varepsilon + \varepsilon^2) / 4(\varepsilon - \varepsilon^2) > 0$ , sceglieremo $M = (1/4 - \varepsilon + \varepsilon^2) / 4(\varepsilon - \varepsilon^2)$ nella definizione di limite .

4.

Scritto w nella forma $r \exp(i\theta)$ , deve essere $r^9 \exp(i(5\theta + \pi/2)) = 2 \exp(i\pi/6)$ e dunque
$r^9 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[9]{2}$ , $5\theta + \pi/2 = \pi/6 + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\pi/15 + 2k\pi/5 \ (k = 0, \dots, 4)$ .