

Calcolo differenziale – esercizi proposti N. 2

1. Calcolare massimo e minimo (se esistono) ed estremo superiore ed inferiore delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato; quando l'intervallo non è precisato è sottointeso che coincida con il C.E.

- | | |
|--|---|
| 1. $ \sin x + \cos x $; $x \in [0, \pi]$ | 2. $\log_{1/2} \sin x$; $x \in [\pi/6, 2\pi/3]$ |
| 3. $(4+x)/(1-x^2)$; $x \in (-1, 1)$ | 4. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$; $x \in (\pi/4, \pi]$ |
| 5. $\frac{x}{\log x}$; $x \in (1, e^2]$ | 6. $\arccos \sqrt{2x - x^2}$ |
| 7. $\arctg(-x^2 + 4x + 21)$ | 8. $2 \sin x + \cos 2x$ |
| 9. $\begin{cases} 4x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 + \log_{1/2} x & \text{se } 1/2 < x \leq 4 \end{cases}$ | 10. $x \operatorname{tg}(\pi/x)$; $x \in [3, +\infty)$ |

2. Stabilire se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato; in caso di risposta affermativa trovare i punti che ne verificano la tesi, in caso di risposta negativa verificare se è possibile che la tesi sia ugualmente soddisfatta.

- | | |
|---|---|
| 1. $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2}$; $x \in [-1, 7/9]$ | 2. $5\sqrt{ x+3 }$; $x \in [-6, 0]$ |
| 3. $(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)$; $x \in [-\pi/4, 0]$ | 4. $\begin{cases} x^2 + x & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 + ax & \text{se } 0 < x \leq 3/2 \end{cases}$ |

3. Data la funzione

$$f(x) = (\cos^3 x)^{1/\operatorname{tg}^3 x}, \quad 0 < x < \pi/2$$

- calcolarne la derivata
- provare che la funzione può essere prolungata per continuità agli estremi dell'intervallo
- stabilire se la funzione così prolungata verifica le ipotesi del teorema di Rolle.

4. Stabilire se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo indicato; in caso di risposta affermativa trovare i punti che ne verificano la tesi, in caso di risposta negativa verificare se è possibile che la tesi sia ugualmente soddisfatta.

- | | |
|---|---|
| 1. $\sqrt{ x^2 - 1 }$; $x \in [-1, 2]$ | 2. $\arcsen \frac{2x}{x^2 + 1}$; $x \in [0, 1]$ |
| 3. $\sqrt[3]{x-2}$; $x \in [1, 3]$ | 4. $\begin{cases} x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \log x & \text{se } 1 < x \leq e^2 \end{cases}$ |

5. Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico delle seguenti funzioni

1. $\log \frac{(|x|-1)^2}{x+1}$

2. $|4x - 3x^2| e^{-2x}$

3. $\sin x + \cos 2x$

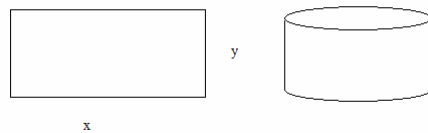
4. $\arcsen \sqrt{\frac{|2x-1|}{x^2}}$

5. $\log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

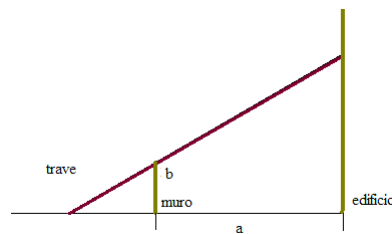
6. $x e^{\sqrt{|x^2-1|}}$

6. Problemi di massimo e minimo

1. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa data trovare quello di area massima.
2. Tra tutte le rette passanti per il punto $P = (1, 2)$ trovare quella che forma con i semiassi positivi un triangolo di area minima.
3. Una lamina rettangolare di perimetro $2H$ è arrotolata a formare un cilindro come in disegno. Trovare le dimensioni che forniscono il volume massimo.



4. Il muro rappresentato in figura è alto b (unità di misura) e dista a dall'edificio. Quanto vale la lunghezza della trave rettilinea più corta che raggiunge il fianco dell'edificio partendo dal suolo all'esterno del muro?



5. Nel piano cartesiano sono dati la circonferenza di centro l'origine e raggio 4 e i punti $R = (8, 0)$, $S = (0, 8)$. Sulla semicirconferenza situata nel semipiano delle ordinate non negative trovare un punto P , in modo che sia massima oppure minima la somma dei quadrati delle sue distanze da R e da S .
 6. Un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio R ruota attorno alla propria base; trovare quale deve essere la sua altezza in modo che il solido generato abbia volume massimo.
7. Data la successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = k, \quad x_{n+1} = e^{x_n} - 1$$

studiarne il limite, al variare del parametro reale k .

8. Date le funzioni

$$f_1(x) = x - 1 + \arccos x \quad , \quad f_2(x) = 2x + \cos x$$

provare che sono entrambe invertibili e calcolare la derivata delle funzioni inverse, la prima nel punto $y_0 = 0$, la seconda nel punto $y_0 = 1$.