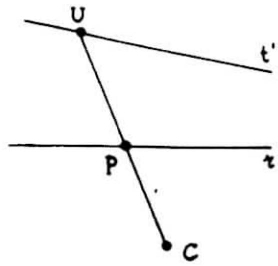
Invece a pag.245-6 definiamo $h:t' \longrightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente: $h(U)=d(U,P)-a$, dove P è il punto di intersezione tra r e la retta per U e C. Abbiamo visto che $h(A)>0$, $h(E)<0$, $h(F)>0$; esiste quindi almeno un punto $G \in t'$, G compreso tra A e E tale che $h(G)=0$ (cioè $G \in f(r)$) e un punto $G' \in t'$, G' compreso tra E e F tale che $h(G')=0$ (cioè $G' \in f(r)$).



A P P E N D I C E

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Consideriamo sul piano x,y la circonferenza di raggio 1:

$$C = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

La lunghezza di questa circonferenza è un numero reale che chiamiamo 2π.
Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, misuriamo $|\alpha|$ unità lungo la circonferenza partendo dal punto $A=(1,0)$, procedendo in senso antiorario se $\alpha \geq 0$ ed in senso orario se $\alpha < 0$. In questo modo ad ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ viene associato un punto $P=f(\alpha) \in C$; abbiamo cioè definito una funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow C .$$

La f opera portando $0 \in \mathbb{R}$ in A e successivalente "avvolgendo" $\mathbb{R}$ su C.

Poniamo ora

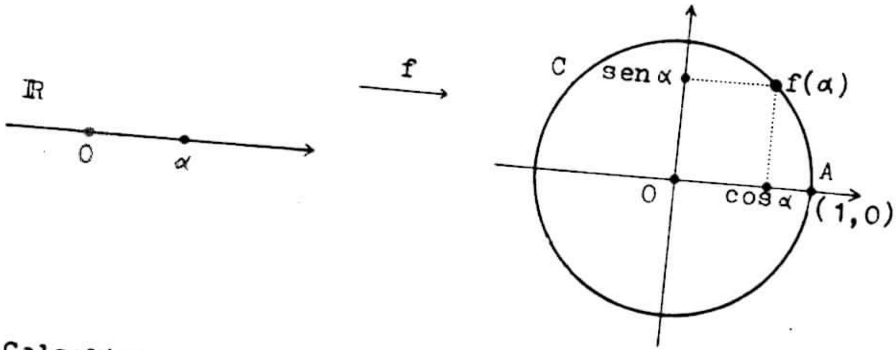
$$\cos\alpha = \text{prima coordinata (ascissa) di } f(\alpha)$$
$$\text{sen}\,\alpha = \text{seconda coordinata (ordinata) di } f(\alpha).$$

In seguito a questa convenzione possiamo scrivere

$$f(\alpha) = (\cos\alpha\ ,\ \text{sen}\,\alpha\ )$$

dove $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$ sono numeri reali univocamente determinati da α. Sono così definite due funzioni, che chiamiamo seno e coseno:

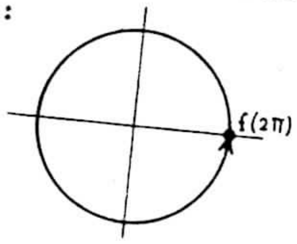
$$\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\quad ,\quad \alpha \longrightarrow \text{sen}\,\alpha$$
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\quad ,\quad \alpha \longrightarrow \cos\alpha\ .$$



Calcoliamo $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ in alcuni casi semplici.

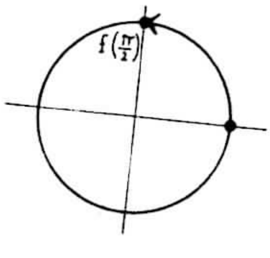
a) $f(2\pi)=f(-2\pi)=(1,0)$, cioè facendo un giro completo, in senso antiorario oppure orario, attorno a C, si ritorna al punto $(1,0)$. Risulta allora:

$$\cos(2\pi) = \cos(-2\pi) = 1$$
$$\text{sen}(2\pi) = \text{sen}(-2\pi) = 0$$



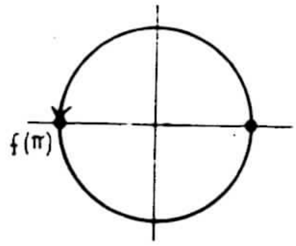
b) $f(\frac{\pi}{2})=(0,1)$, quindi:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1\ .$$



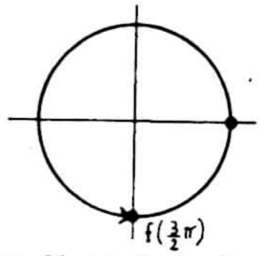
c) $f(\pi)=(-1,0)$, quindi

$$\cos\pi = -1$$
$$\text{sen}\,\pi = 0$$



d) $f(\frac{3}{2}\pi) = (0,-1)$, quindi

$$\cos(\tfrac{3}{2}\pi) = 0$$
$$\text{sen}(\tfrac{3}{2}\pi) = -1 \quad .$$



<u>Osservazione</u>. f è una funzione periodica di periodo 2π, cioè $f(x+2\pi)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$; pertanto $\text{sen}\,x$ e $\cos x$ risultano pure funzioni periodiche di periodo 2π.
Si ha cioè $\text{sen}\,x = \text{sen}(2\pi+x)$, $\cos x=\cos(2\pi+x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Da queste relazioni segue $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

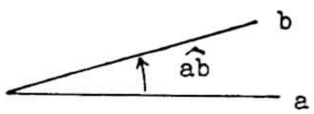
$$\text{sen}(x+k\cdot 2\pi) = \text{sen}\,x \quad , \quad \cos(x+k\cdot 2\pi) = \cos x \quad .$$

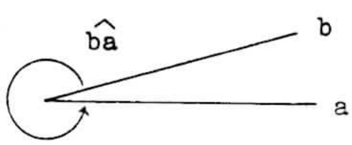
Per esempio

$$\text{sen}\,\frac{5}{2}\pi = \text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\frac{-7}{2}\pi = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 2\pi) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ .$$

Seno e coseno si possono definire in modo analogo per gli angoli del piano x,y . Consideriamo gli angoli come definiti da una coppia ordinata di semirette a e b del piano x,y aventi l'origine coincidente. Indichiamo precisamente con $\widehat{ab}$ l'angolo che la semiretta a deve descrivere per sovrapporsi alla semiretta b , ruotando in senso antiorario attorno alla sua origine; risulteranno quindi diversi gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{ba}$:

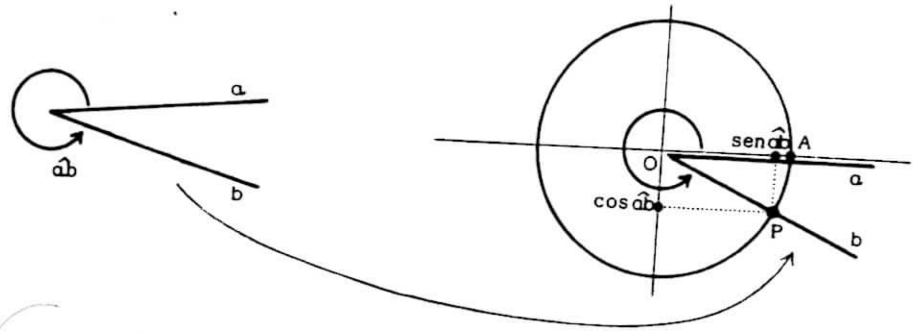




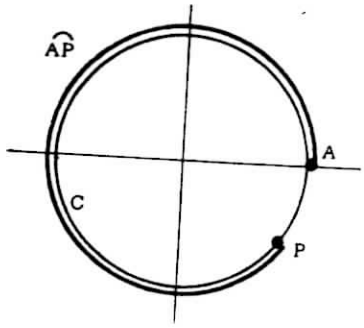
Dato ora un angolo $\widehat{ab}$ nel piano x,y, spostiamo con un movimento rigido la coppia di semirette a,b in modo che la semiretta a venga a coincidere con la semiretta avente origine in $O=(0,0)$ e passante per il punto $A=(1,0)$, cioè con la semiretta positiva dell'asse x. La semiretta b intersecherà allora la circonferenza C in un punto che chiamiamo P.
Poniamo allora:

$$\cos \widehat{ab} = \text{ascissa (prima coordinata) di } P,$$
$$\operatorname{sen} \widehat{ab} = \text{ordinata (seconda coordinata) di } P,$$

di modo che risulterà $P = (\cos \widehat{ab}, \operatorname{sen} \widehat{ab})$.



La relazione tra la definizione di seno e coseno per i numeri reali fatta tramite la funzione f e quella ora data per gli angoli è la seguente.
All'angolo $\widehat{ab}$ si può associare un numero reale $\alpha \in [0, 2\pi[$, chiamato misura in radianti di $\widehat{ab}$, nel seguente modo: α è la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ di C che il punto $A=(1,0)$ descrive per sovrapporsi, ruotando in senso antiorario, al punto P:



α = lunghezza di $\widehat{AP}$

La misura in radianti di un angolo è quindi la lunghezza dell'arco da esso definito sulla circonferenza unitaria. Possiamo esprimere tale lunghezza tramite la funzione f, osservando che la sua restrizione a $[0,2\pi[$ misura appunto la lunghezza degli archi aventi il primo estremo in A. Si ha cioè $f(\alpha)=P$, quindi

$\alpha=(f|_{[0,2\pi[})^{-1}(P)$.

La relazione $f(\alpha)=P$ si può scrivere in questo modo:

$$(\cos\alpha,\ \mathrm{sen}\,\alpha) = (\cos\widehat{ab},\ \mathrm{sen}\,\widehat{ab})$$

(infatti per definizione $f(\alpha)=(\cos\alpha,\ \mathrm{sen}\,\alpha)$ e $P=(\cos\widehat{ab}, \mathrm{sen}\,\widehat{ab})$).
Questa uguaglianza ci dice che seno e coseno di un angolo sono esattamente seno e coseno del numero reale che esprime la sua misura in radianti.
Misurando gli angoli in radianti, possiamo dunque indifferentemente parlare di seno e coseno di numeri reali oppure di angoli.

Osservazione 1. Essendo f periodica, se $f(\alpha)=P$ anche $f(\alpha+k2\pi)=P$; cioè all'angolo $\widehat{ab}$ sono associati in modo naturale, oltre alla sua misura in radianti, i numeri reali $\alpha+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, ciascuno dei quali individua la ampiezza di $\widehat{ab}$.
Diciamo allora che i numeri $\alpha+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ rappresentano la misura in radianti di $\widehat{ab}$. Due numeri reali x e y rappresentano dunque la misura in radianti dello stesso angolo se e solo se $x\equiv y \pmod{2\pi}$.

Osservazione 2. Trasformazione di gradi in radianti.
Gli angoli si possono misurare, oltre che in radianti, in gradi sessagesimali o centesimali. All'angolo giro corrispondono 360 gradi sessagesimali, 400 gradi centesimali e 2π radianti. Se esprimiamo la ampiezza di un angolo in gradi sessagesimali con s, in gradi centesimali con c, e in radianti con r si avrà:

$$\frac{r}{2\pi} = \frac{s}{360} = \frac{c}{400}$$

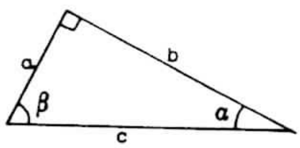
In particolare:

$$s = \frac{360}{2\pi} r \ ; \text{ se } r=1 \quad s= \frac{360}{2\pi} = 57+ \frac{17}{60} + \frac{44}{3600} + \dots =$$

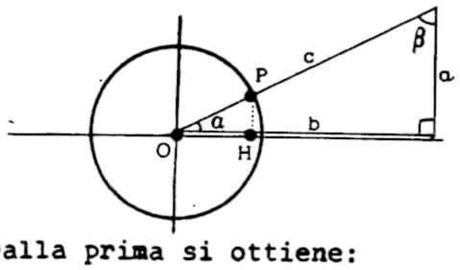
$$= 57°17'44' + \dots .$$

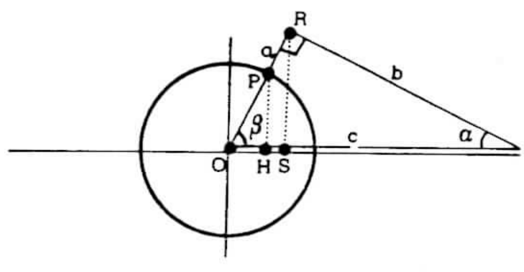
cioè l'ampiezza dell'angolo che in radianti misura 1, e che viene chiamato radiante, è espressa in gradi sessagesimali pari a 57°17'44"+... . Il radiante è caratterizzato dal fatto di staccare sulla circonferenza unitaria un arco lungo 1. La misura di un angolo in radianti si può anche intendere come misura rispetto alla unità di misura costituita dal radiante.

Seno e coseno si possono anche definire in termini di rapporto di lati di triangoli rettangoli.
Dato il triangolo rettangolo T



sia $\alpha = \widehat{bc}$, $\beta = \widehat{ca}$. Muovendo opportunamente T si ottengono queste figure





Dalla prima si ottiene:

$$\text{sen}\,\alpha = \overline{PH} = \frac{\overline{PH}}{1} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{a}{c} \qquad \boxed{\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}}$$

Dalla seconda si ottiene (tenuto conto della similitudine di OSR e T

$$\text{sen}\,\beta = \widetilde{PH} = \frac{\widetilde{PH}}{1} = \frac{\widetilde{PH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}} = \frac{b}{c} \qquad \boxed{\text{sen}\,\beta = \frac{b}{c}}$$

Vale cioè la relazione

$$\boxed{\text{Seno di un angolo acuto di } T = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}}$$

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE.

Dalla definizione di cos e sen si ricava che:

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \boxed{\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1}$

Poichè un quadrato non è mai negativo:

$$\cos^2 x \le \cos^2 x + \text{sen}^2 x$$

$$\text{sen}^2 x \le \cos^2 x + \text{sen}^2 x$$

cioè:

$$\cos^2 x \le 1$$

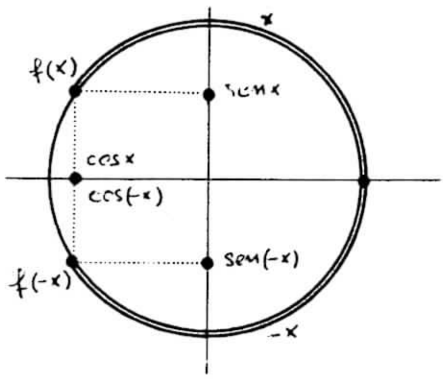
$$\text{sen}^2 x \le 1$$

che equivalgono a:

(2) $\boxed{-1 \le \cos x \le 1}$ e (3) $\boxed{-1 \le \text{sen}\, x \le 1}$

I punti $f(x)=(\cos x, \text{sen}\, x), f(-x) = (\cos(-x), \text{sen}(-x))$ sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. Di conseguenza osserviamo che

(4) $\boxed{\begin{array}{l}\cos(-x) = \cos x \\ \text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x\end{array}}$

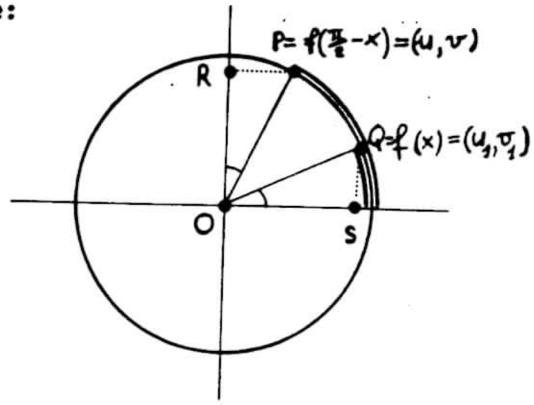


Si hanno inoltre le seguenti formule:

$$(5)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{sen} x \end{aligned}}$$

che si dimostrano nel modo seguente:

Nella figura il triangolo OPR è uguale al triangolo OQS.



Allora si ha: $u = v_1$ e $v = u_1$ e quindi:

$$\cos x = \overline{OR} = \overline{QS} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

e

$$\operatorname{sen} x = \overline{PR} = \overline{OS} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti formule:

$$(6)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\cos(x+\pi) = -\cos x \\ &\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x \end{aligned}}$$

$$(7)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\cos(\pi-x) = -\cos x \\ &\operatorname{sen}(\pi-x) = \operatorname{sen} x \end{aligned}}$$

$$(8)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x \\ &\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \end{aligned}}$$

Esercizio 2. Trovare il periodo delle seguenti funzioni

(a) $x \longrightarrow \operatorname{sen} 2x$

(b) $x \longrightarrow \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

Esercizio 3. Dimostrare che le funzioni seno e coseno non hanno periodi positivi minori di 2π.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti numeri

(a) $\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi$ (f) $\cos 135°$

(b) $\cos \frac{7}{4}\pi$ (g) $\operatorname{sen} 315°$

(c) $\operatorname{sen} \frac{13}{4}\pi$ (h) $\cos(-225°)$

(d) $\cos \frac{7}{2}\pi$ (i) $\operatorname{sen}(-135°)$

(e) $\operatorname{sen}(-\frac{5}{4}\pi)$ (l) $\cos(3 \cdot 360° + 45°)$

GRAFICO DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

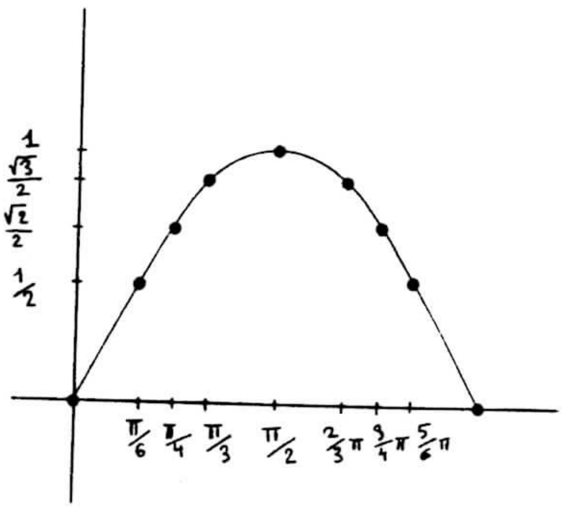
Studiamo il grafico di

$$y = \operatorname{sen} x \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

costruendolo per punti:

Con ragionamenti di tipo geometrico sul cerchio unitario, compiliamo la seguente tabella e quindi il grafico:

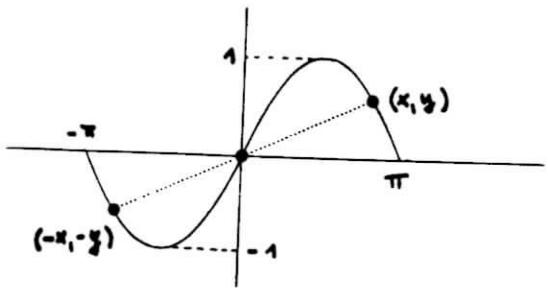
x	y=sen x
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$
π	0



Usando la seguente identità ottenuta in precedenza

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$

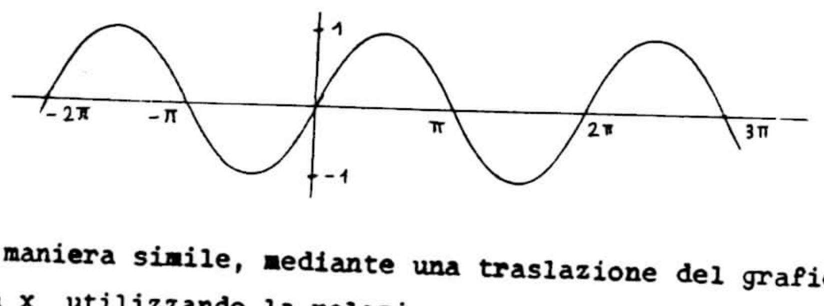
abbiamo che il grafico di $x \longrightarrow \text{sen } x$ è <u>simmetrico rispetto all'origine</u> (sen x è una funzione dispari).
Quindi otteniamo il grafico di $x \longrightarrow \text{sen } x$ per $-\pi \leq x \leq \pi$



Mediante l'identità:

$$\text{sen}(x+2k\pi) = \text{sen } x \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}$$

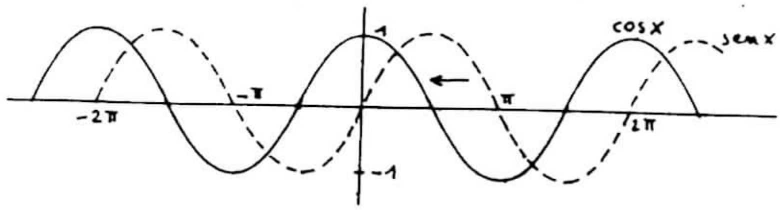
otteniamo con una traslazione di k unità a destra o a sinistra del grafico di $x \longrightarrow \text{sen } x$ per $x \in [-\pi, \pi]$ il grafico $x \longrightarrow \text{sen } x$ per $x \in \mathbb{R}$



In maniera simile, mediante una traslazione del grafico di $x \longrightarrow \text{sen } x$ utilizzando la relazione:

$$\cos x = \text{sen } (x + \frac{\pi}{2})$$

otteniamo il grafico di $x \longrightarrow \cos x$, $x \in \mathbb{R}$



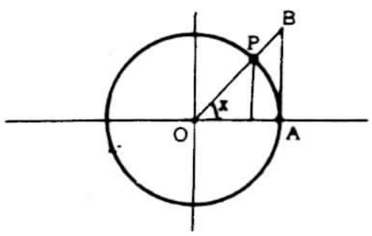
LA FUNZIONE TANGENTE.

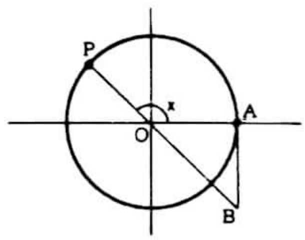
Definiamo la funzione tangente nel seguente modo:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

dove x è un numero reale oppure un angolo.
Rispondere alle seguenti domande:

a) Dimostrare che tg x è rappresentata nelle figure seguenti dal segmento AB; più precisamente è rappresentata dall'ordinata di B.





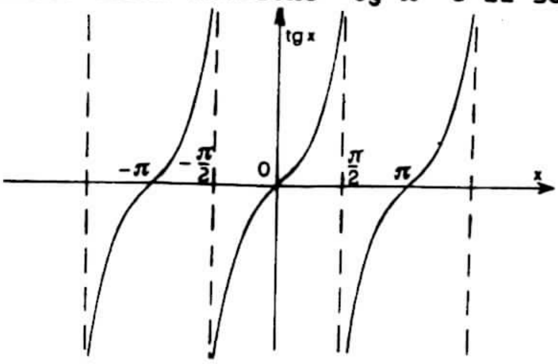
Cosa accade quando $\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$? E quando $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$?

b) La funzione tg x è definita $\forall\ x \in \mathbb{R}$ come cos x e sen x? Quale è il suo dominio?

c) Calcolare: tg 0; tg $\frac{\pi}{6}$; tg $\frac{\pi}{4}$; tg $\frac{\pi}{3}$; tg $\frac{\pi}{2}$; tg $\frac{2}{3}\pi$; tg $\frac{5}{6}\pi$; tg π; tg $\frac{7}{6}\pi$, tg $\frac{3}{4}\pi$; tg $\frac{5}{4}\pi$; tg $\frac{4}{3}\pi$; tg $\frac{3}{2}\pi$.

d) Quale è il periodo di $tg\ x$? (2π è sicuramente un periodo; ce n'è però uno minore?).

Il grafico della funzione $tg\ x$ è il seguente:



Questo andamento può essere ricavato osservando che in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $tg\ x$ è crescente; che posto $A = \left\{tg\ x \mid x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$ si ha $\inf A=-\infty$, $\sup A=+\infty$; che $tg\ x$ è una funzione dispari; e che il suo periodo è..... .

<u>Esercizio</u> 1. Tenendo presente la relazione $sen^2x + cos^2x=1$ e la definizione di $tg\ x$, completare la seguente tabella.

sen x =	sen x	....	....
cos x =	$\sqrt{1-sen^2x}$	cos x	....
tg x =	$\dfrac{sen\ x}{\sqrt{1-sen^2x}}$	....	tg x

<u>Esercizio</u> 2. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$tg(-\alpha)= -tg\alpha$ $\quad tg(\pi-\alpha)= -tg\alpha$ $\quad tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)= \frac{-1}{tg\alpha}$

$tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)= \frac{1}{tg\alpha}$ $\quad tg(\pi+\alpha)=tg$ $\quad tg(2\pi+\alpha)=tg\alpha$

$tg(\frac{3}{2}\pi+\alpha)=\frac{1}{tg\alpha}$ $\quad tg(\frac{3}{2}\pi-\alpha)= \frac{1}{tg\alpha}$ $\quad tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha$

Definiamo la funzione cotg x nel seguente modo:

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Esercizio 3. Rispondere per cotg x alle domande a),b),c),d).
Fare gli esercizi 1 e 2 per cotg x .
Disegnare il grafico di cotg x .

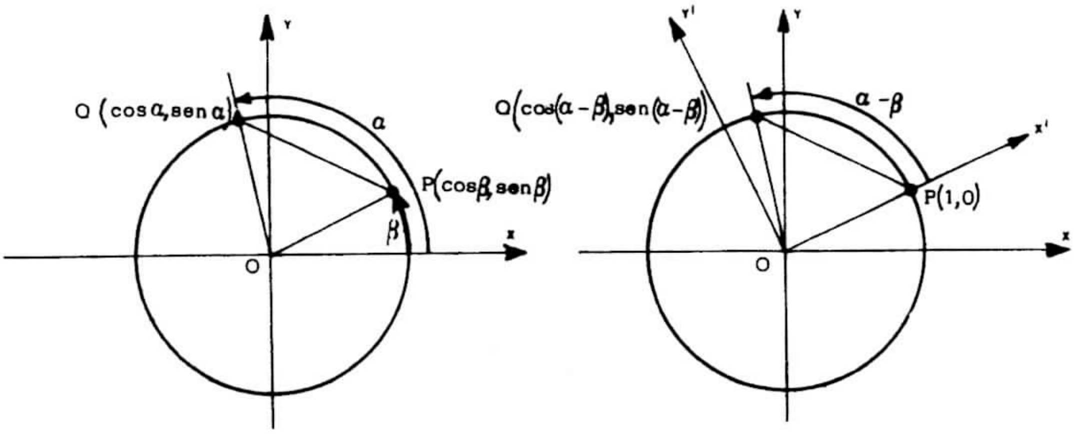
FORMULE DI ADDIZIONE.

Dimostriamo la formula:

(1) $$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \; \text{sen}\,\beta}$$

La distanza da P a Q è

(2) $$PQ = \sqrt{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\beta - \text{sen}\,\alpha)^2}$$



Usiamo ora il fatto che la lunghezza di un arco su un cerchio dipende solo dall'unità di misura e non dalla scelta degli assi.(*)

(*) Una rotazione è una isometria (vedi Cap. VI).

Se noi scegliamo x' e y' come assi allora in questo sistema di coordinate P ha coordinate $(1,0)$ e Q ha coordinate $(\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$.

In questo nuovo sistema la distanza da P e Q è:

$$(3) \quad PQ = \sqrt{(1-\cos(\alpha-\beta))^2 + (0-\operatorname{sen}(\alpha-\beta))^2}$$

Eguagliando (2) e (3) ed elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene:

$$(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) + (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) =$$
$$= 1 + \left[\cos^2(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)\right] - 2\cos(\alpha-\beta)$$

essendo $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ si ha:

$$1+1-2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = 1+1-2\cos(\alpha-\beta)$$

Perciò concludendo si ottiene:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Si potrebbe ottenere in maniera analoga un'espressione per $\cos(\alpha+\beta)$.

Preferiamo usare la formula dimostrata sopra. Rimpiazziamo β con $-\beta$ nella formula (1):

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

e quindi si ha:

$$(4) \qquad \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Utilizzando le formule (5) del paragrafo 2 otteniamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] =$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta$$

cioè

$$(5) \qquad \boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Rimpiazzando β con $-\beta$ in (5) otteniamo:

(6) $$\boxed{\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti formule:

$$\boxed{\cos x = \pm\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

bisezione

$$\boxed{\text{sen}\, x = \pm\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cos x}$$

duplicazione

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \\ &= 2\cos^2 x - 1 = \\ &= 1-2\,\text{sen}^2 x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{sen}\, a\,x\ \text{sen}\, b\,x &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]\\ \cos a\,x \cos b\,x &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right]\\ \text{sen}\, a\,x \cos b\,x &= \frac{1}{2}\ \text{sen}(a+b)x + \text{sen}(a-b)x\end{aligned}}$$

$\cos x - \cos y = -2\,\text{sen}\,\frac{x-y}{2}\ \text{sen}\,\frac{x+y}{2}$

$\text{sen}\,x - \text{sen}\,y = 2\,\text{sen}\,\frac{x-y}{2}\ \cos\frac{x+y}{2}$

prostaferesi

Esercizio 2. Dimostrare le seguenti identità usando le formule viste in perecedenza

(a) $\cos^4\xi - \text{sen}^4\xi = \cos 2\xi$

(b) $\cos^2\frac{1}{2}\psi = \dfrac{\text{tg}\psi + \text{sen}\psi}{2\text{tg}\psi}$

(c) $1 + \text{sen}\varphi = (\text{sen}\,\frac{1}{2}\varphi + \cos\frac{1}{2}\varphi)^2$

(d) $(\text{sen}\,\eta + \cos\eta)^2 = 1 + \text{sen}\,2\eta$

(e) $\operatorname{sen} 2\theta \cos\theta - \cos 2\theta \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$.

(f) $\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)$

(g) $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg} 2\theta = \frac{\cos 3\theta}{\cos 2\theta}$

(h) $\operatorname{sen}^3\theta = \frac{1}{4}(3 \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 3\theta)$

(i) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x(2\cos x + 1)$

Esercizio 3. Dimostrare le seguenti identità:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}, \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Esercizio 4. Disegnare il grafico delle funzioni:

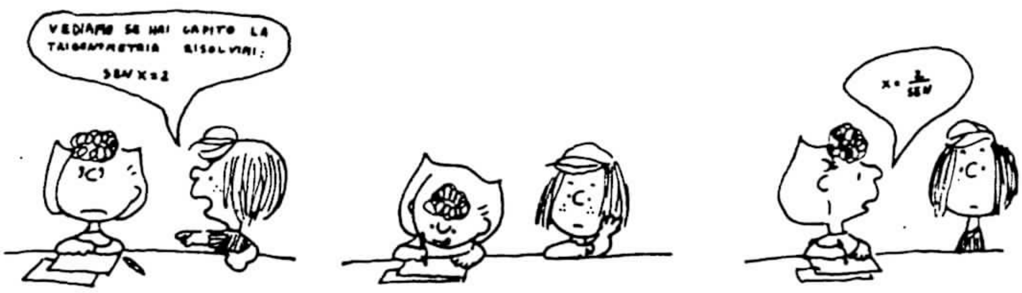
(a) $f(x) = [\operatorname{sen} \pi x]$

(b) $f(x) = [\cos \pi x]$

<u>Esercizio</u> 5. Utilizzando tutto quello che sapete sulle funzioni trigonometriche (formule, proprietà, ecc...) compilate la seguente tabella:

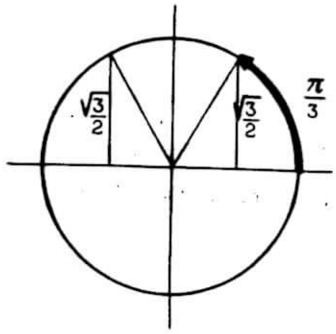
α	sen α	cos α	tg α
$0^\circ = 0$			
$15^\circ = \frac{\pi}{12}$			
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$			
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$			
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$			
$75^\circ = \frac{5}{12}\pi$			
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$			
$105^\circ = \frac{7}{12}\pi$			
$120^\circ = \frac{2}{3}\pi$			
$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$			
$150^\circ = \frac{5}{6}\pi$			
$165^\circ = \frac{11}{12}\pi$			
$180^\circ = \pi$			
$270^\circ = \frac{3}{2}\pi$			
$360^\circ = 2\pi$			

<u>Esercizio</u> 6. Trovare l'errore:



EQUAZIONI GONIOMETRICHE.

Un'equazione goniometrica è un'equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione trigonometrica; il caso più elementare è quello delle equazioni $\operatorname{sen} x=a$, oppure $\cos x=b$, oppure $\operatorname{tg} x=c$.



Esempio 1. Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

il minore tra gli archi positivi il cui seno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\frac{\pi}{3}$, però ricordando che $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi-\alpha)$, l'equazione sarà verificata anche da $(\pi-\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}\pi$, ed inoltre essendo $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+2k\pi)$ l'equazione è verificata anche da tutti gli archi si ottengono aggiungendo ad essi multipli di 2π, quindi gli archi che verificano l'equazione sono infiniti; più precisamente tutti gli archi del tipo seguente:

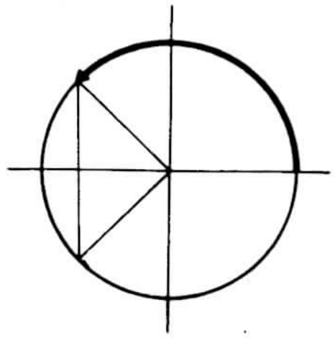
$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Osserviamo che le soluzioni scritte sopra si possono scrivere in maniera più concisa nel modo seguente: se è il minore degli angoli positivi il cui seno è a le soluzioni di $\operatorname{sen} x = a$ sono le seguenti:

$$x = k\pi + (-1)^k \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Esempio 2. Risolvere l'equazione:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Come è noto il minore degli archi positivi il cui coseno è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ è $\frac{3}{4}\pi$; poichè $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ l'equazione sarà verificata anche da $-\frac{3}{4}\pi$ che ha lo stesso coseno dell'angolo positivo $\frac{5}{4}\pi$; inoltre $\cos\alpha = \cos(\alpha+2k\pi)\ (k \in \mathbb{Z})$ e quindi oltre gli archi trovati risolvono l'equazione tutti gli archi che si ottengono ad essi sommando multipli interi di π:

$$x = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \\ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Osservazione. Dalla definizione di seno e coseno deduciamo che condizione necessaria perchè le equazioni $x=a$ e $\cos x=b$ abbiano soluzione è che risulti:

$-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq b \leq 1$. (La condizione è anche sufficiente?)

Esempio 3. Risolvere: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

il minore degli angoli positivi la cui tangente è $\sqrt{3}$, è $\frac{\pi}{3}$. Poichè la tangente è periodica di periodo π cioè

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \sqrt{3}\ (k \in \mathbb{Z})$ le soluzioni dell'equazione sono le seguenti:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Esempio 4. Risolvere: $\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$

In genere la risoluzione di queste equazioni goniometriche più complicate avviene in tre passi:

(1°) <u>far comparire un'unica funzione nell'equazione</u>:

$$\text{sen}^2x + 3(1-\text{sen}^2x) + \text{sen}\ x - 2=0$$

cioè

$$2\ \text{sen}^2x - \text{sen}\ x-1=0$$

(2°) <u>risolvere l'equazione ottenuta considerando la funzione come incognita</u> cioè

$$\text{sen}\ x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

(3°) risolvere le equazioni elementari ottenute:

$\text{sen}\ x = -\frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ e $x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

$\text{sen}\ x=1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

<u>Esempio</u> 5. Risolvere: $3\ \text{sen}\ x + \sqrt{3}\cos x = 0$

divido per $\cos x \neq 0$ $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$ e ottengo $3\ \text{tg}\ x+\sqrt{3}=0$

quindi $\text{tg}\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

<u>Esempio</u> 6. Risolvere: $3\ \text{sen}^2x + 2\sqrt{3}\ \text{sen}\ x\cos x - 3\cos^2x=0$

divido per $\text{sen}^2x\neq0$ $(x\neq k\pi)$ e ottengo:

$$3\ \text{cotg}^2x - 2\sqrt{3}\ \text{cotg}\ x - 3 = 0$$

$\text{cotg}\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$\text{cotg}\ x = \sqrt{3}$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

<u>Esempio</u> 7. Risolvere: $\text{sen}^2x - 2(1-\sqrt{3})\text{sen}\ x\cos x-(1+2\sqrt{3})\cos^2x+ + 1 = 0$ essendo $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$ si ha:

$\text{sen}^2x-2(1-\sqrt{3})\text{sen}\ x\cos x-(1+2\sqrt{3})\cos^2x+\cos^2x+\text{sen}^2x=0$

ossia:

$$\text{sen}^2x-(1-\sqrt{3})\text{sen}\ x\cos x-\sqrt{3}\cos^2x = 0$$

divido per $\cos^2 x \neq 0$ $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$ e procedo come negli esempi precedenti.

Esempio 8. Risolvere: $\text{sen } x + 2\sqrt{3}\cos x - 1 = 0$

sostituisco al posto di sen e cos la loro espressione in funzione di $\text{tg}\,\frac{x}{2}$

$$\frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\sqrt{3}\,\frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 = 0$$

cioè:

$$(3-\sqrt{3})\text{tg}^2\frac{x}{2} - 2\,\text{tg}\,\frac{x}{2} + \sqrt{3} - 1 = 0 \quad \text{quindi}$$

si procede come negli esempi precedenti.

Esempio 9. Risolvere:

$$\begin{cases} \text{sen } x - \sqrt{2}\cos y = -1 \\ \text{sen } x + \sqrt{2}\cos y = 1 \end{cases}$$

risolvendolo come un sistema lineare nelle variabili $\sin x$, $\cos y$ trovo:

$$\begin{cases} 2\,\text{sen } x = 0 \quad \text{ossia} \quad \text{sen } x = 0 \qquad x = k\pi\,(k \in \mathbb{Z}) \\ 2\sqrt{2}\cos y = 2 \quad \text{ossia} \quad \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Esempio 10. Risolvere:

$$\begin{cases} \text{sen } x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ \text{sen } x \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

il sistema può essere visto nelle incognite $\text{sen } x$ e $\cos y$ che sono le soluzioni di: $z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$ ecc. ...

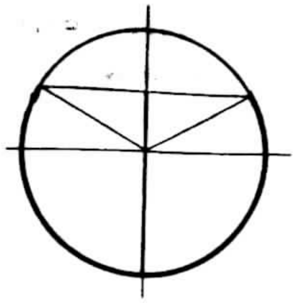
Esempio 11. Risolvere:

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{3}\cos x - \cos y = 1 \end{cases}$$

poichè i due angoli sono complementari la seconda equazione diventa: $\sqrt{3}\cos x - \text{sen } x - 1 = 0$, e si procede come nell'esempio 8.

Esempio 12. Risolvere la seguente disequazione goniometrica:

$$\text{sen } x < \frac{1}{2}$$



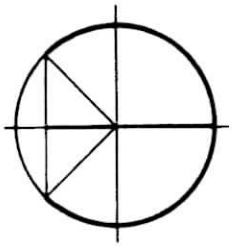
$\text{sen } x = \frac{1}{2}$ si verifica per x uguale a $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ e $\frac{5}{6}\pi+2k\pi$; dalla figura osserviamo che gli archi che verificano la disequazione sono:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ; \quad \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$$

oppure:

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Esempio 13. Risolvere la disequazione: $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ si verifica per x uguale a $\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ e $\frac{5}{4}\pi+2k\pi$

quindi dalla figura deduciamo che la disequazione è verificata da

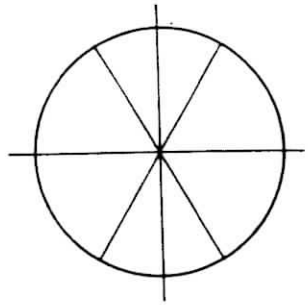
$$2k\pi \le x < \frac{3}{4}\pi+2k\pi \text{ e } \frac{5}{4}\pi+2k\pi < x \le 2(k+1)\pi$$

cioè:

$$-\frac{3}{4}\pi+2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi+2k\pi$$

Esempio 14. Risolvere:

$$4\text{sen } x \text{ tg } x - 3\,\frac{1}{\cos x} < 0 \quad \text{cioè}$$



$$\frac{4\text{sen}^2 x - 3}{\cos x} < 0 \quad \text{essendo} \quad 4\text{ sen}^2 x - 3 > 0$$

per $\text{sen } x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen } x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

dalla figura si deduce che il numeratore del primo membro si annulla per x uguale a:

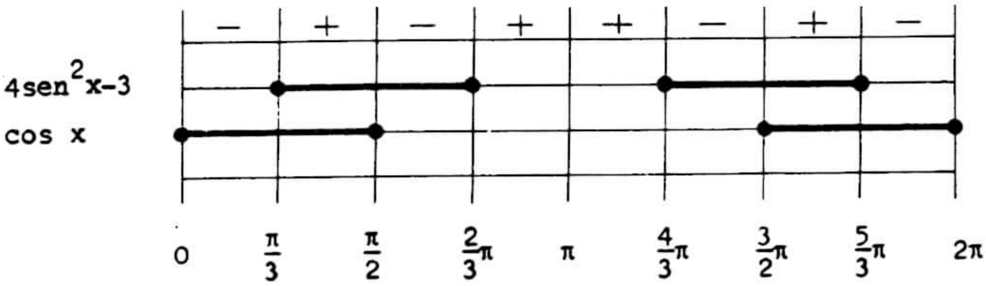
$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; $\frac{4}{3}\pi + 2k\pi$; $\frac{5}{3}\pi + 2k\pi$; è positivo per:

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ e $\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$

ed è negativo per tutti gli altri valori dell'arco.

Il denominatore invece è nullo per x uguale a: $\frac{\pi}{2} + k\pi$

è positivo nel I e IV quadrante, negativo nel II e III quadrante.



la frazione risulta negativa per:

$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

$\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; $\frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ e $x \leq 2(k+1)\pi$

Esercizi.

(A) Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

(1) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;;\; x = 2k\pi\right]$

(2) $\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} ; x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

(3) $\sqrt{3}\ \text{sen}\, x + \cos x - \sqrt{3} = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

(4) $4\,\text{sen}^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

(5) $\text{sen}\, x\ \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 6x\ \text{sen}\, 3x = 0$ $\left[x = k\frac{\pi}{5}\ ;\ x = k\frac{\pi}{4}\right]$

(6) $\begin{cases} 3\ \text{sen}\, x = \sqrt{3}\ \text{sen}\, y \\ \text{tg}\, x\ \text{tg}\, y = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + (m-k)\pi \end{matrix}\right]$

(7) $\begin{cases} \text{sen}(x-y) = 0 \\ \text{tg}(x+y) = \sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} x = \frac{\pi}{6} + (k+m)\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + (k-m)\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right]$

(8) $\begin{cases} x - y = \frac{3}{2}\pi \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} x = \frac{13}{8}\pi\ ;\ \frac{15}{8}\pi + k\pi \\ y = \frac{\pi}{8}\ ;\ \frac{3}{8}\pi + k\pi \end{matrix}\right]$

(9) $\begin{cases} \text{sen}\, x - \text{sen}\, y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} x = \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{7}{6} \\ y = \frac{\pi}{6}\ ;\ -\frac{2}{3}\pi + 2m\pi \end{matrix}\right]$

(B) Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $\text{tg}\, x > -1$

(2) $\begin{cases} \text{tg}\, x > \sqrt{3} \\ \text{sen}\, x > \frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

(3) $4\ \text{sen}^2 x - 1 > 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

(4) $\cos 2x - 2\cos x + 1 > 0$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

(5) $\frac{\sqrt{2}\ \text{sen}\, x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} > 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \quad \text{con} \quad x \neq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

(6) $\text{sen}\, x + (\sqrt{2}-1)\cos x > \sqrt{2} - 1$ $\left[2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$