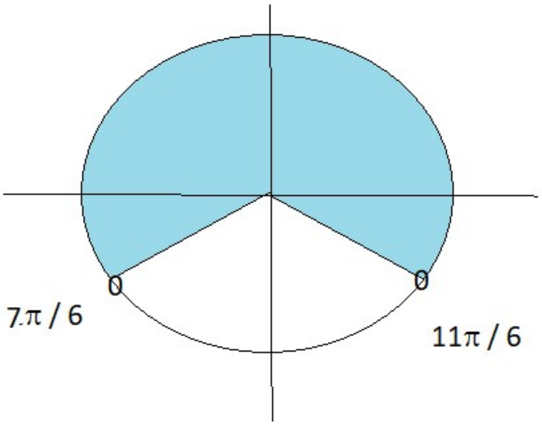
Prova scritta del 13.7.2021 – Parte seconda [ A ]

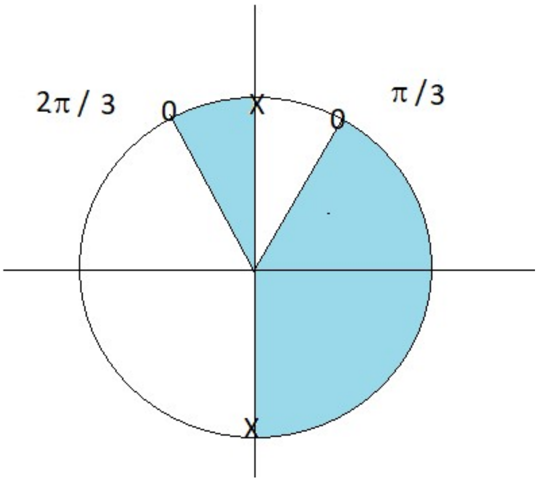
1.

SGN E ZERI

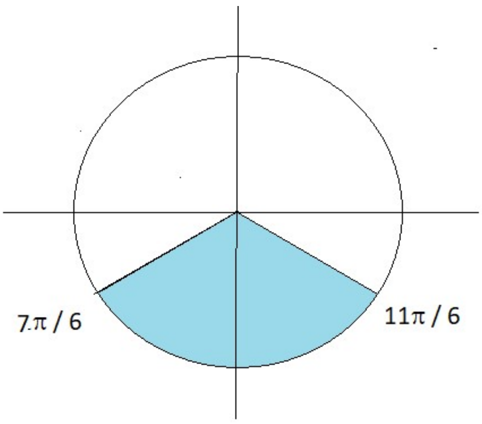



positiva nella zona colorata

DRV f ' ( x ) = $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x \ \ \operatorname{sgn}\cos x$ , x ≠ π/2 . x ≠ 3π/2 ( punti angolosi )




DRV² f " ( x ) = $-\sqrt{3}\operatorname{sen} x - |\cos x|$



GRAFICO

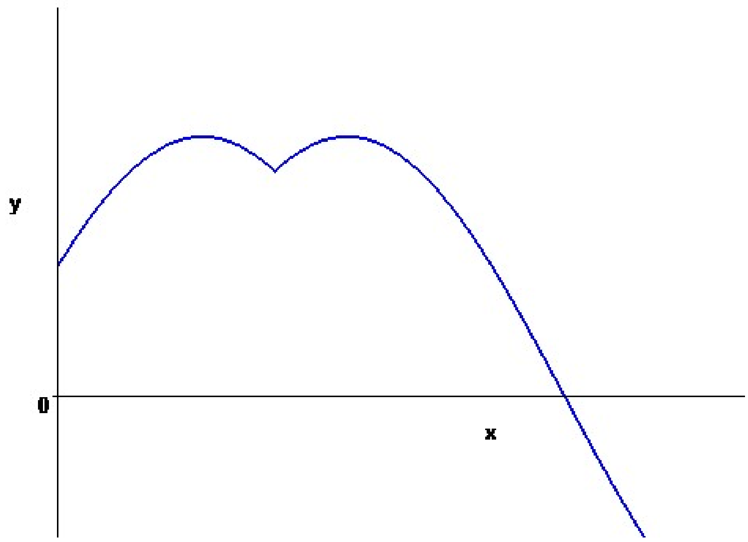
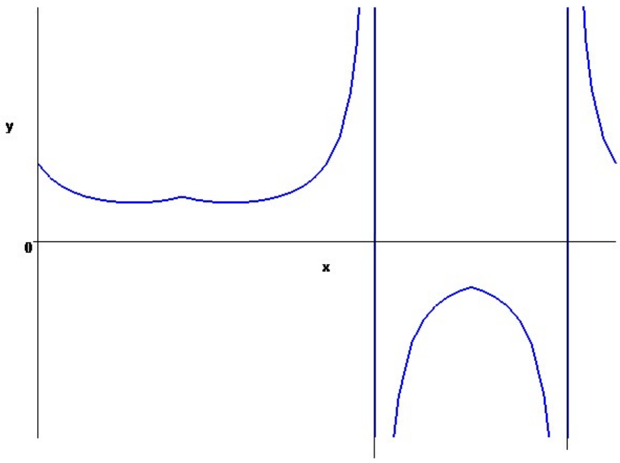



GRAFICO 1 / f ( x )




2.

C.E. $0 \le y \le \pi/2 \rightarrow x \ge 0$

SLZ COSTANTI $y = 0$

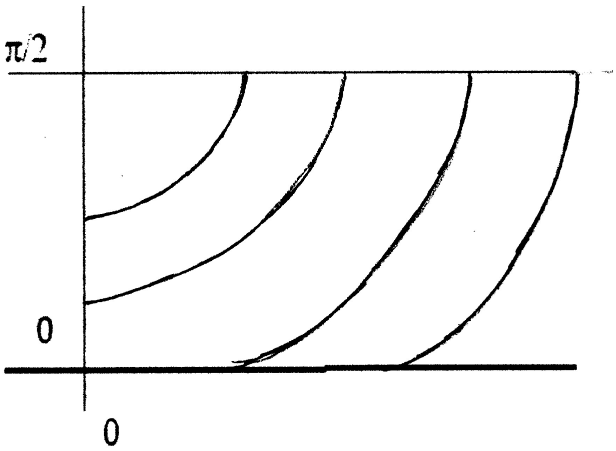
Poiché B' ( 0 ) non esiste , le soluzioni non costanti possono intersecare la costante.

SLZ NON COSTANTI $\int \frac{\cos y}{\sqrt{\operatorname{sen} y}}\,dy = \int \sqrt{x}\,dx$

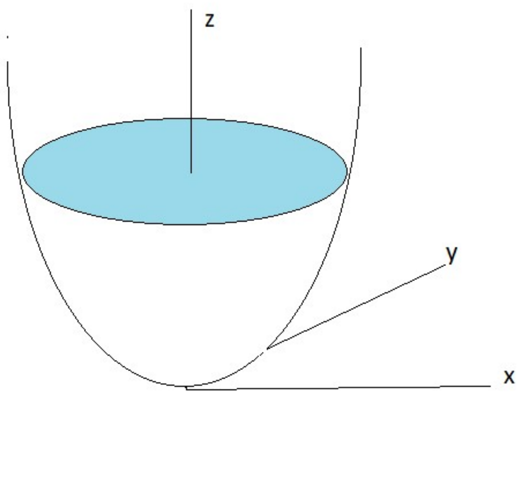
$$2\sqrt{\operatorname{sen} y} = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} - c\right) \Leftrightarrow \sqrt{\operatorname{sen} y} = \frac{x^{3/2} - c}{3} \Leftrightarrow y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^{3/2} - c}{3}\right)^2$$

Deve essere :

$$0 < \frac{x^{3/2} - c}{3} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{3/2} > c \\ x^{3/2} < c + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{se } -3 < c < 0 & 0 < x < (c+3)^{2/3} \\ \text{se } c > 0 & c^{3/2} < x < (c+3)^{2/3} \end{matrix}$$

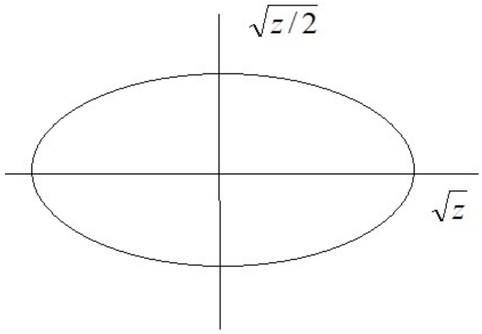



3.




paraboloide a sezione ellittica

I piani perpendicolari all'asse z sezionano la regione secondo un'ellisse; al livello z ( $0 < z \leq 1$ ) la sezione S ( z ) è la parte di piano racchiusa dall'ellisse $x^2 + 2y^2 = z$.




L’area A ( z ) della sezione è data da:

$$A(z) = 4\int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{z - x^2}{2}}\, dx = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z - x^2}\, dx = \frac{4}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi z}{4} = \frac{\pi z}{\sqrt{2}}$$

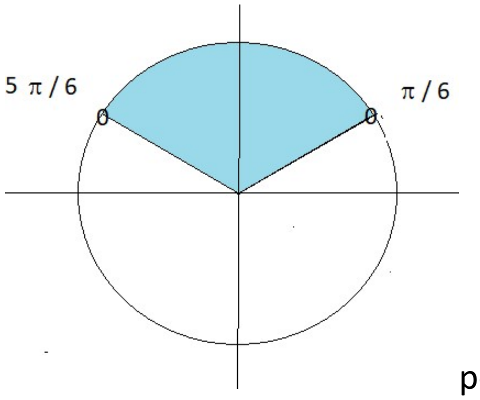
Infatti l’ntegrale rappresenta un quarto dell’area del cerchio di raggio $\sqrt{z}$ .

Il volume è dunque dato da $\int_0^1 \frac{\pi z}{\sqrt{2}}\, dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Prova scritta del 13.7.2021 – Parte seconda [ B ]

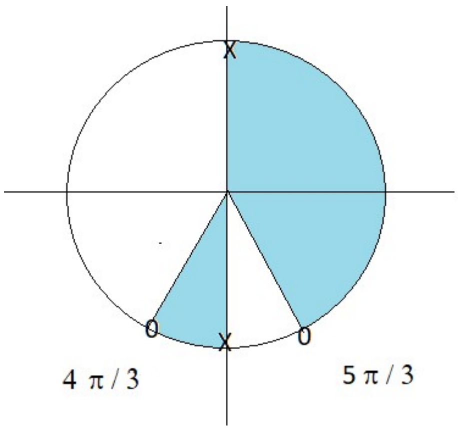
1.

SGN E ZERI

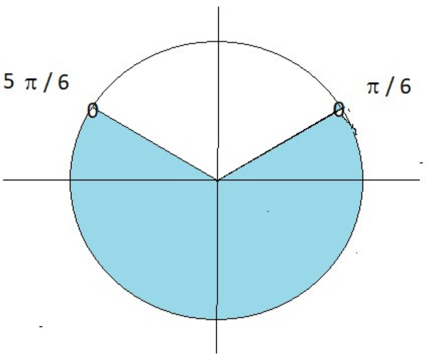



positiva nella zona colorata

DRV f ' ( x ) = $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x \;\; \operatorname{sgn}\cos x$ , $x \neq \pi/2$ . $x \neq 3\pi/2$ ( punti angolosi )




DRV$^2$ f " ( x ) = $-\sqrt{3}\operatorname{sen} x + |\cos x|$



GRAFICO

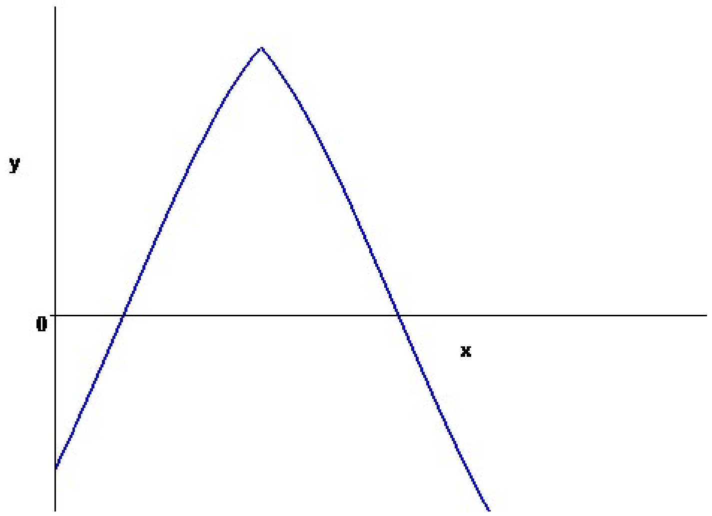
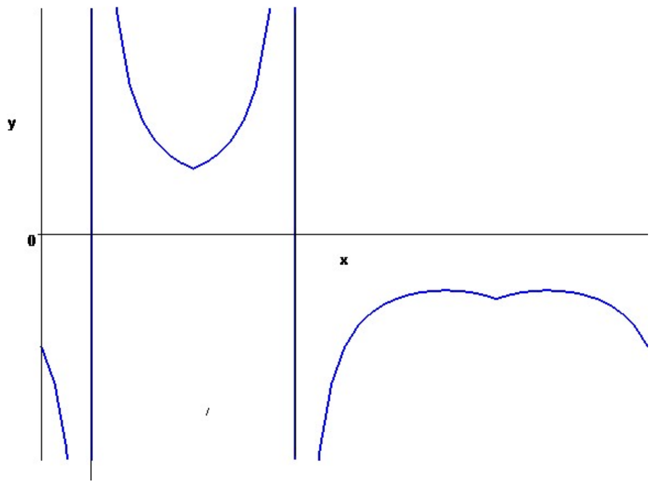



GRAFICO 1 / f ( x )




2.

C.E. $0 \leq y \leq \pi/2 \rightarrow x \geq 0$

SLZ COSTANTI $y = \pi/2$

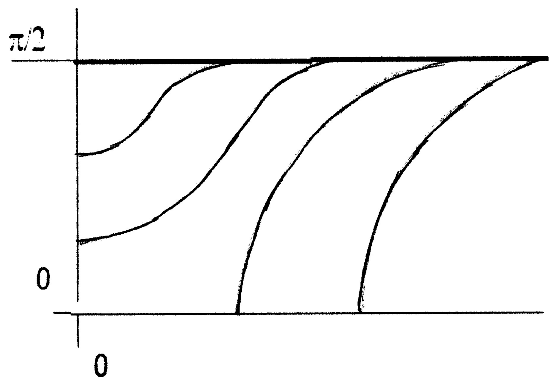
Poiché B' (π/2) non esiste , le soluzioni non costanti possono intersecare la costante.

SLZ NON COSTANTI $\int \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = \int \sqrt{x}\, dx$

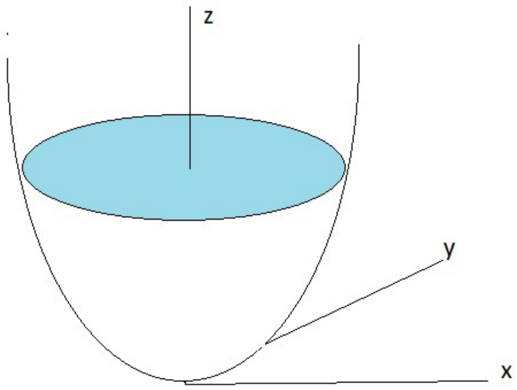
$$-2\sqrt{\cos y} = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} - c\right) \Leftrightarrow \sqrt{\cos y} = \frac{c - x^{3/2}}{3} \Leftrightarrow y = \arcsen\left(\frac{c - x^{3/2}}{3}\right)^2$$

Deve essere :

$$0 < \frac{c - x^{3/2}}{3} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{3/2} < c \\ x^{3/2} > c - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{se } 0 < c < 3 & 0 < x < c^{2/3} \\ \text{se } c \geq 3 & (c-3)^{3/2} < x < {}^{2/3} \end{array}$$

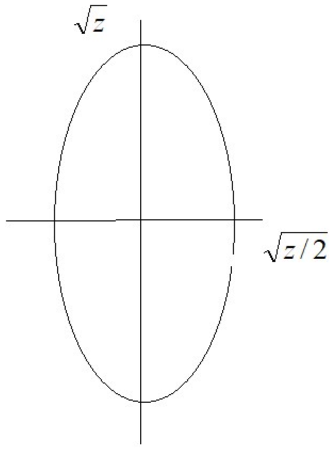



3.




paraboloide a sezione ellittica

I piani perpendicolari all'asse z sezionano la regione secondo un'ellisse; al livello z ( $0 < z \leq 1$ ) la sezione S ( z ) è la parte di piano racchiusa dall'ellisse $2x^2 + y^2 = z$.




L'area A ( z ) della sezione è data da:

$$A(z) = 4\int_0^{\sqrt{z/2}} \sqrt{z-2x^2}\,dx = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z-t^2}\,dt = \frac{4}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi z}{4} = \frac{\pi z}{\sqrt{2}}$$

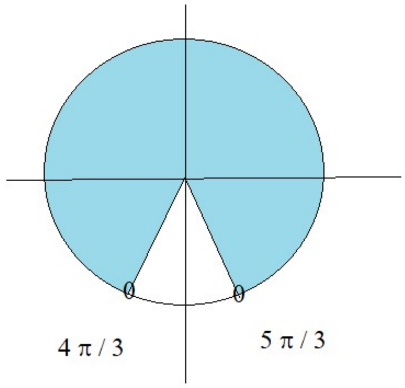
Infatti , nel primo integrale abbiamo posto $\sqrt{2}\,x = t$ ; il secondo rappresenta un quarto dell'area del cerchio di raggio $\sqrt{z}$ .

Il volume è dunque dato da $\int_0^1 \frac{\pi z}{\sqrt{2}}\,dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Prova scritta del 13.7.2021 – Parte seconda [ C ]

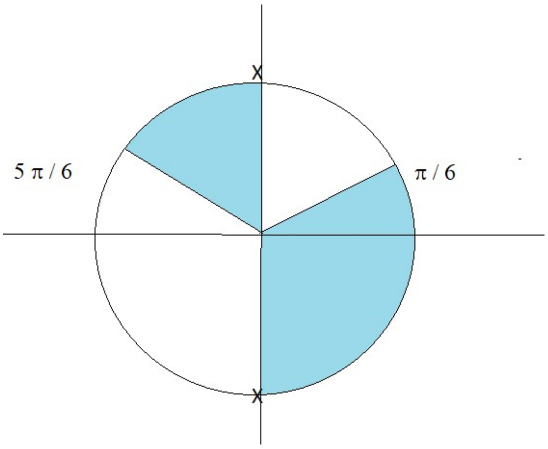
1.

SGN E ZERI

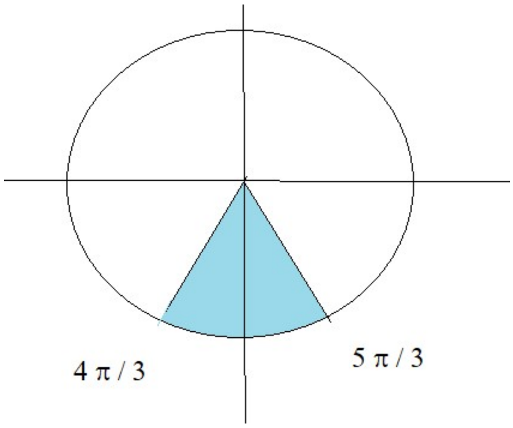



positiva nella zona colorata

DRV f ‘ ( x ) = $\cos x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}x \;\; \mathrm{sgn}\cos x$ , x ≠ π/2 . x ≠ 3π/2 ( punti angolosi )




DRV$^2$ f “ ( x ) = - $\mathrm{sen}x - \sqrt{3}\,|\cos x|$




GRAFICO

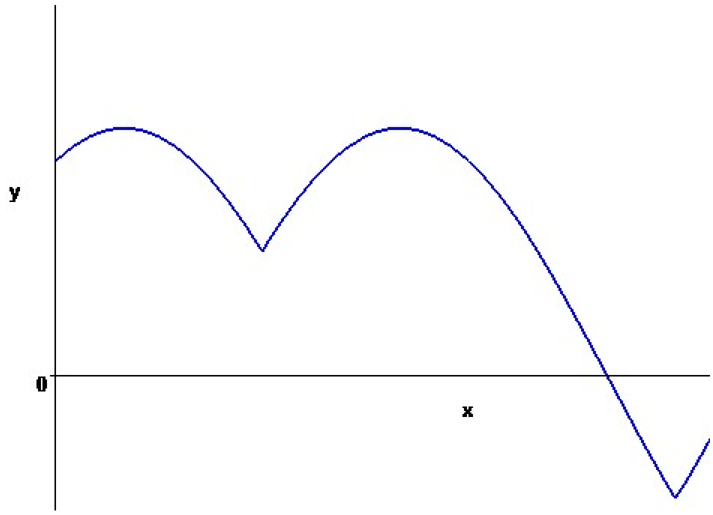
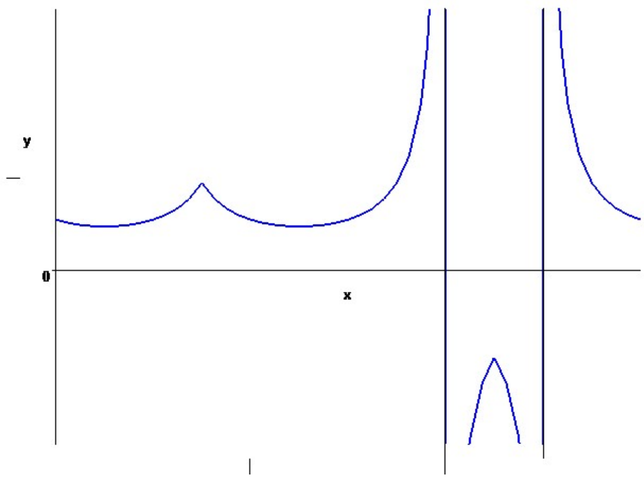



GRAFICO 1 / f ( x )



2.

C.E. $-\pi/2 \le y \le 0 \rightarrow x \le 0$

SLZ COSTANTI $y = 0$

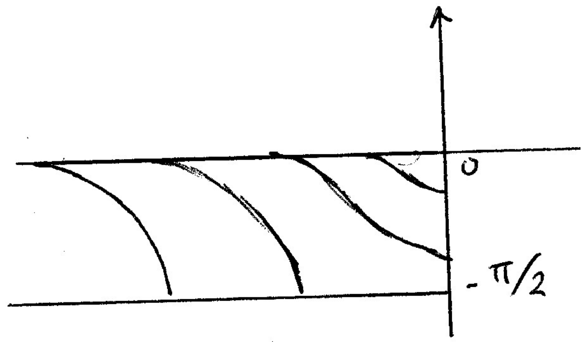
Poiché B’ (0) non esiste , le soluzioni non costanti possono intersecare la costante.

SLZ NON COSTANTI $\int \frac{\cos y}{\sqrt{-\operatorname{sen} y}}\, dy = \int -\sqrt{-x}\, dx$

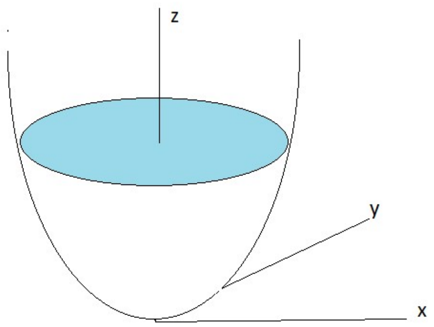
$$-2\sqrt{-\operatorname{sen} y} = \frac{2}{3}\left((-x)^{3/2} - c\right) \Leftrightarrow \sqrt{-\operatorname{sen} y} = \frac{c - (-x)^{3/2}}{3} \Leftrightarrow y = -\operatorname{arcsen}\left(\frac{c - (-x)^{3/2}}{3}\right)^2$$

Deve essere :

$$0 < \frac{c - (-x)^{3/2}}{3} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (-x)^{3/2} < c \\ (-x)^{3/2} > c - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{se } 0 < c < 3 & -c^{2/3} < x < 0 \\ \text{se } c \ge 3 & -c^{2/3} < x < -(c-3)^{2/3} \end{array}$$

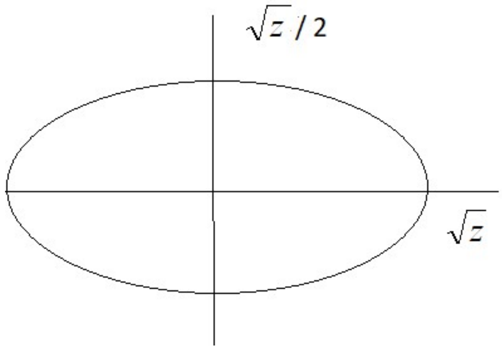



3.




paraboloide a sezione ellittica

I piani perpendicolari all'asse z sezionano la regione secondo un'ellisse; al livello z ( $0 < z \leq 1$ ) la sezione S ( z ) è la parte di piano racchiusa dall'ellisse $x^2 + 4y^2 = z$.




L'area A ( z ) della sezione è data da:

$$A(z) = 4 \int_0^{\sqrt{z}} \frac{\sqrt{z - x^2}}{2}\, dx = 2 \int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z - x^2}\, dx = 2\,\frac{\pi z}{4} = \frac{\pi z}{2}$$

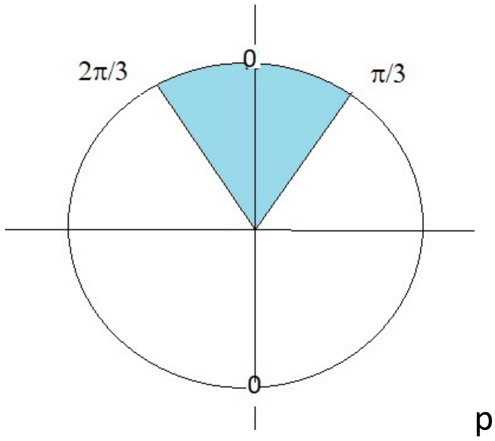
Infatti l'ntegrale rappresenta un quarto dell'area del cerchio di raggio $\sqrt{z}$ .

Il volume è dunque dato da $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi z}{2}\, dz = \frac{\pi}{4}$ .

Prova scritta del 13.7.2021 – Parte seconda [ D ]

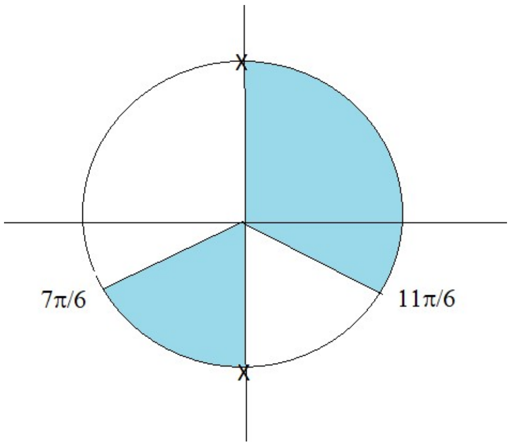
1.

SGN  E ZERI

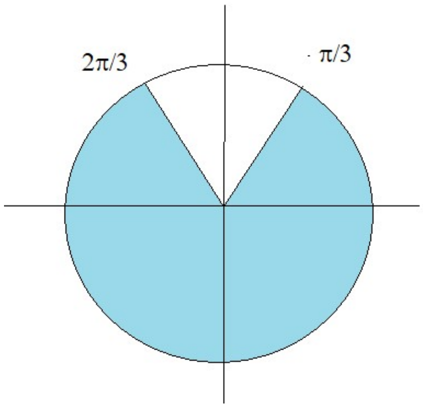



positiva nella zona colorata

DRV   $f'(x) = \cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}x \ \ \text{sgn}\cos x$ , $x \neq \pi/2$ . $x \neq 3\pi/2$ ( punti angolosi )




DRV[2]   $f''(x) = -\,\text{sen}x + \sqrt{3}\,|\cos x|$



GRAFICO

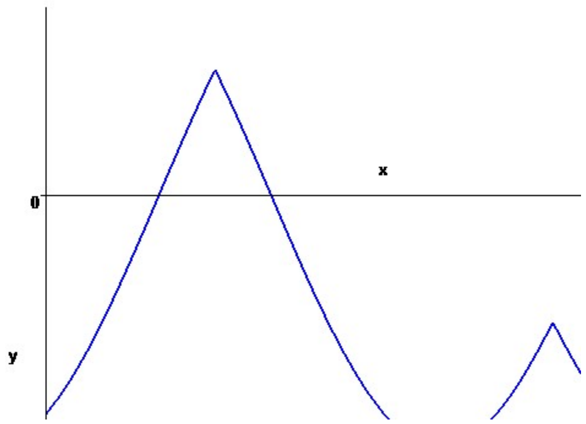
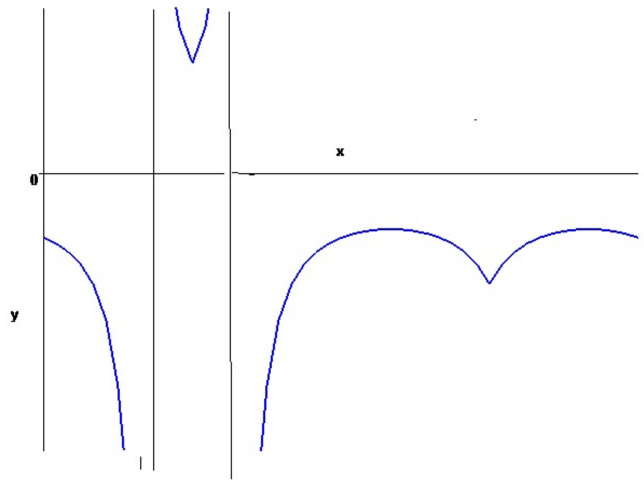



GRAFICO 1 / f ( x )




2.

C.E. $\pi/2 \le y \le \pi \rightarrow x \le 0$

SLZ COSTANTI $y = \pi/2$

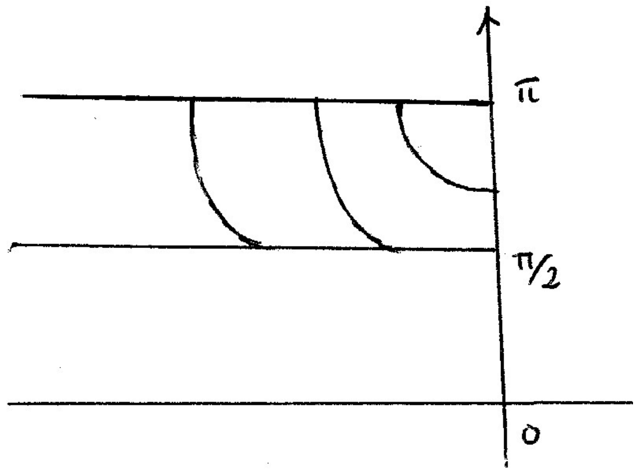
Poiché B' (π/2) non esiste , le soluzioni non costanti possono intersecare la costante.

SLZ NON COSTANTI $\int \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{-\cos y}}\, dy = \int -\sqrt{-x}\, dx$

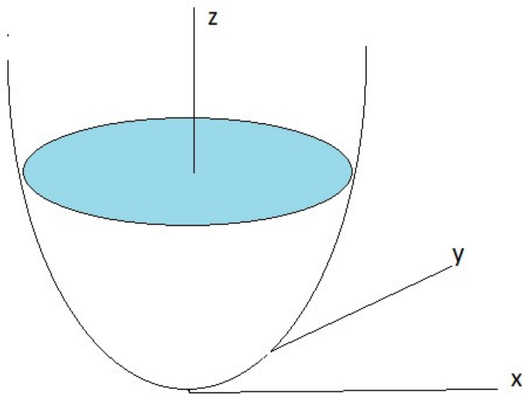
$$-2\sqrt{-\cos y} = \frac{2}{3}\left((-x)^{3/2} - c\right) \Leftrightarrow \sqrt{-\cos y} = \frac{(-x)^{3/2} - c}{3} \Leftrightarrow y = \arccos - \left(\frac{(-x)^{3/2} - c}{3}\right)^2$$

Deve essere :

$$c < -(-x)^{3/2} < 3 + c \iff \begin{cases} (-x)^{3/2} < c \\ (-x)^{3/2} > c - 3 \end{cases} \iff \begin{array}{ll} \text{se } -3 < c < 0 & -(3+c)^{2/3} < x < 0 \\ \text{se } c \geq 0 & -(3+c)^{2/3} < x < -c^{2/3} \end{array}$$

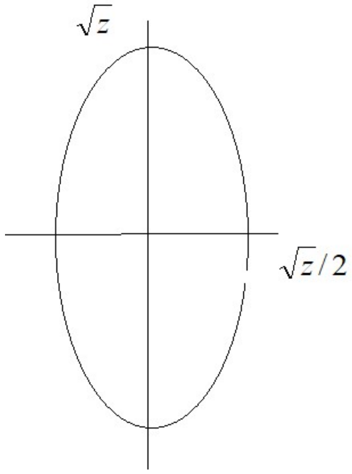



3.




paraboloide a sezione ellittica

I piani perpendicolari all'asse z sezionano la regione secondo un'ellisse; al livello z ( $0 < z \leq 1$ ) la sezione S ( z ) è la parte di piano racchiusa dall'ellisse $4x^2 + y^2 = z$.




L’area A ( z ) della sezione è data da:

$$A(z) = 4\int_0^{\sqrt{z}/2} \sqrt{z-4x^2}\;dx = 2\int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z-t^2}\;dt = 2\,\frac{\pi z}{4} = \frac{\pi z}{2}$$

Infatti , nel primo integrale abbiamo posto 2x = t ; il secondo rappresenta un quarto dell’area del cerchio di raggio $\sqrt{z}$ .

Il volume è dunque dato da $\int_0^1 \frac{\pi z}{2}\,dz = \frac{\pi}{4}$.