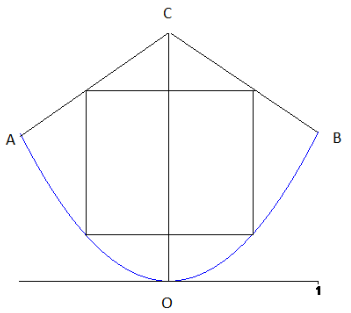
Soluzioni [A]

1.



A = (-1 , 1) ; f ' (-1) = - 2 ; retta normale y = (x + 3) / 2

B = (1 , 1) ; f ' (1) = 2 ; retta normale y = (3 - x) / 2

Base rettangolo : 2 x con $0 \le x \le 1$

Altezza rettangolo : $(3 - x)/2 - x^2$

Area rettangolo : $f(x) = x(3 - x - 2x^2)$

$f'(x) = 3 - 2x - 6x^2 \ge 0$ per $0 \le x \le (\sqrt{19} - 1)/6$

$x_{max} = (\sqrt{19} - 1)/6$

2.

CE R

SGN Non si può studiare per via algebrica

LIM per $x \to \pm\infty$ $f(x) \approx x \to \pm\infty$; $f(x) - x \approx \log x^2 \to +\infty$ non c'è asintoto

DRV $f'(x) = 1 + \operatorname{sgn}(\log(x^2 + x + 1))\,\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$, per $x \ne -1$, $x \ne 0$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} & \text{per } x < -1 \vee x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{x^2+x+1} & \text{per } -1 < x < 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^+$ $f'(x) \to 2$; per $x \to 0^-$ $f'(x) \to 0$ punto angoloso

per $x \to -1^+$ $f'(x) \to 2$; per $x \to -1^-$ $f'(x) \to 0$ punto angoloso

———— 0 - - - - - - - - X ———— X ————

-2 -1 0

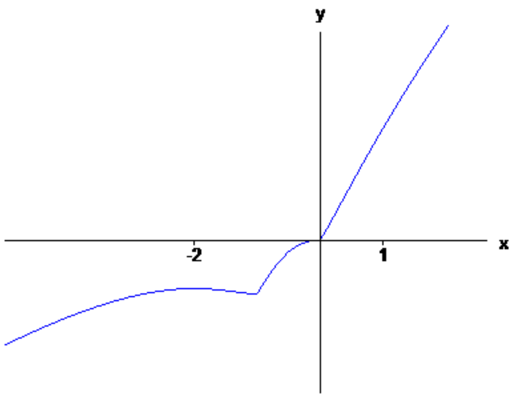
DRV² $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2} & \text{per } x<-1 \vee x>0 \\ \dfrac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & \text{per } -1<x<0 \end{cases}$

- - - - - - - 0 —— X - - - - - - - X —— 0 - - - - - -

-2 α -1 0 β

$$\alpha = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\ ,\ \beta = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

GRAFICO



3.

$1 - \operatorname{sen} x = 1 - x + o(x^2)$ $\qquad \sqrt{1-\operatorname{sen} x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

$$\exp(\sqrt{1-\operatorname{sen} x}) = e \cdot \exp(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)) = e \cdot \exp(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} + o(x^2))$$

$$= e(1 - \frac{x}{2} + o(x^2))$$

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$

$\cos(\operatorname{sen} x) = \cos(x + o(x^2)) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + \cos(\operatorname{sen} x)} = \frac{1}{1 + x - x^2/2 + o(x^2)} =$$

$$= 1 - x + x^2/2 + x^2 + o(x^2) = 1 - x + 3x^2/2 + o(x^2)$$

$$f(x) = e(1 - x/2 + o(x^2))\,(1 - x + 3x^2/2 + o(x^2)) = e(1 - 3x/2 + 2x^2) + o(x^2).$$

4.

$f(x) = a\,tgx + b/tgx + c \qquad f'(x) = (a/\cos^2 x) - (b/sen^2 x)$

$f''(x) = (2a\,senx/\cos^3 x) + (2b\,cosx/sen^3 x)$

$f(\pi/4) = a + b + c \qquad f'(\pi/4) = 2(a - b) \qquad f''(\pi/4) = 4(a + b) \qquad f'(\pi/6) = 4a/3 - 4b$

Le condizioni da imporre sono:

$a + b + c = 0$, $a - b = 0$, $4(a + b) > 0$, $4(a/3 - b) = -8/3$

Le tre equazioni forniscono $a = b = 1$, $c = -2$; questi valori verificano anche la disequazione.

$f(x) = tgx + 1/tgx - 2$

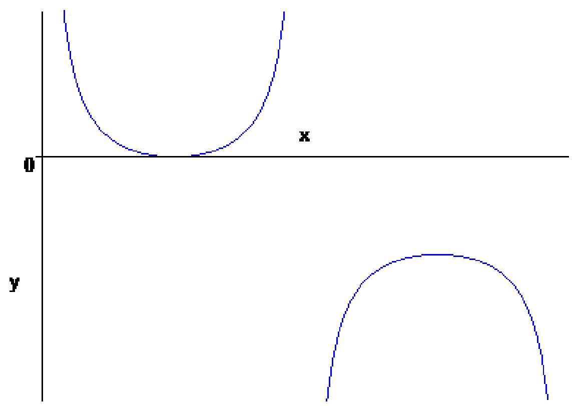
La funzione $tgx + 1/tgx$ è dispari e dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine; nell'intervallo $[0, \pi]$ si ha una simmetria rispetto al punto $(\pi/2, 0)$. Il grafico di $f(x)$ è traslato di 2 unità verso il basso e questo determina una simmetria rispetto al punto $(\pi/2, -2)$. Possiamo dunque limitare lo studio della funzione all'intervallo $(0, \pi/2)$.

LIM per $x \to 0$ e per $x \to \pi$ $f(x) \to +\infty$; $f(\pi/4) = 0$

DRV $f'(x) = 1/\cos^2 x - 1/sen^2 x \geq 0 \iff sen^2 x \geq \cos^2 x \iff 1 - \cos^2 x \geq \cos^2 x$

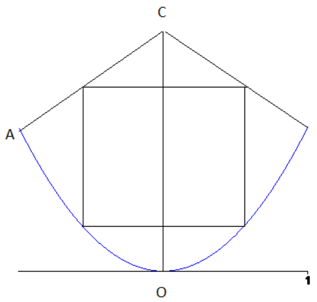
$$\iff \cos^2 x \leq 1/2 \iff \pi/4 \leq x < \pi/2$$

DRV^2 $f''(x) = (2\,senx/\cos^3 x) + (2\,cosx/sen^3 x)$ sempre positiva nell'intervallo



Soluzioni [B]

1.



$A = (-2 , 1)$; $f'(-2) = -1$; retta normale $y = x + 3$

$B = (2 , 1)$; $f'(2) = 1$; retta normale $y = 3 - x$

Base rettangolo : $2x$ con $0 \le x \le 2$

Altezza rettangolo : $(3 - x) - x^2/4$

Area rettangolo : $f (x) = 2x (3 - x - x^2/4)$

$f'(x) = 6 - 4x - 3x^2/2 \ge 0$ per $0 \le x \le (2\sqrt{13} - 4) / 3$

$x_{max} = (2\sqrt{13} - 4) / 3$

2.

CE R

SGN Non si può studiare per via algebrica

LIM per $x \to \pm\infty$ $f (x) \approx -x \to \mp\infty$; $f (x) + x \approx \log x^2 \to +\infty$ non c'è asintoto

DRV $f'(x) = -1 + \operatorname{sgn} (\log (x^2 - x + 1)) \dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$, per $x \ne 0$, $x \ne 1$

$$= \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - x + 1} & \text{per } x < 0 \vee x > 1 \\ \dfrac{-x^2 - x}{x^2 - x + 1} & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

per $x \to 0^+$ $f'(x) \to 0$; per $x \to 0^-$ $f'(x) \to -2$ punto angoloso

per $x \to 1^+$ $f'(x) \to 0$; per $x \to 1^-$ $f'(x) \to -2$ punto angoloso

$$\cdots\cdots \overset{-2\quad 0}{\times} \cdots\cdots \overset{-2\quad 0}{\times} \text{———} 0 \cdots\cdots$$

$$\quad 0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 2$$

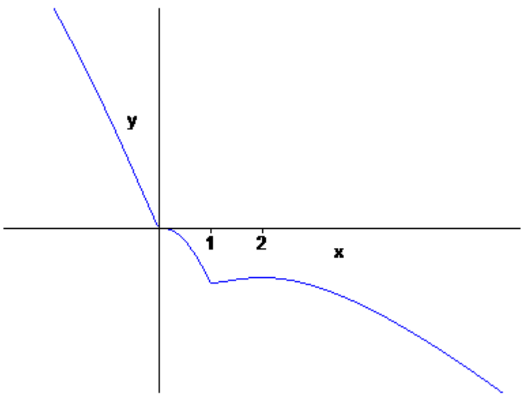
DRV^2 $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2} & \text{per } x<0 \ \vee\ x>1 \\ \dfrac{2x^2-2x-1}{(x^2-x+1)^2} & \text{per } 0<x<1 \end{cases}$

$$\cdots\cdots 0 \text{——} \times \cdots \quad \cdots \times \text{——} 0 \cdots\cdots$$

$$\alpha \qquad 0 \qquad\qquad 1 \qquad \beta \qquad\qquad 2$$

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\ ,\ \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

GRAFICO



3.

$\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ $\qquad \sqrt{\cos x} = 1 - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$

$$\exp(\sqrt{\cos x}) = e \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) = \quad e\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)$$

$\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$ $\qquad \operatorname{tg} x = x + o(x^2)$

$$\cos(\operatorname{tg} x) = \cos(x + o(x^2)) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{\text{senx} + \cos(\text{tgx})} = \frac{1}{1 + x - x^2/2 + o(x^2)} =$$

$$= 1 - x + x^2/2 + x^2 + o(x^2) = 1 - x + 3x^2/2 + o(x^2)$$

$$f(x) = e(1 - x^2/4 + o(x^2))\,(1 - x + 3x^2/2 + o(x^2)) = e(1 - x + 5x^2/4) + o(x^2).$$

4.

$$f(x) = a\,\text{tgx} + b/\text{tgx} + c \qquad f'(x) = (a/\cos^2 x) - (b/\text{sen}^2 x)$$

$$f''(x) = (2a\,\text{senx}/\cos^3 x) + (2b\cos x/\text{sen}^3 x)$$

$$f(\pi/4) = a + b + c \qquad f'(\pi/4) = 2(a - b) \qquad f''(\pi/4) = 4(a + b) \qquad f'(\pi/6) = 4a/3 - 4b$$

Le condizioni da imporre sono:

$a + b + c = 0$, $a - b = 0$, $4(a + b) < 0$, $4(a/3 - b) = 8/3$

Le tre equazioni forniscono $a = b = -1$, $c = 2$; questi valori verificano anche la disequazione.

$f(x) = 2 - \text{tgx} - 1/\text{tgx}$

La funzione $-\text{tgx} - 1/\text{tgx}$ è dispari e dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine; nell'intervallo $[0, \pi]$ si ha una simmetria rispetto al punto $(\pi/2, 0)$. Il grafico di $f(x)$ è traslato di 2 unità verso l'alto e questo determina una simmetria rispetto al punto $(\pi/2, 2)$. Possiamo dunque limitare lo studio della funzione all'intervallo $(0, \pi/2)$.

LIM per $x \to 0$ e per $x \to \pi$ $f(x) \to -\infty$; $f(\pi/4) = 0$

DRV $f'(x) = -1/\cos^2 x + 1/\text{sen}^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x \leq \cos^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x \leq \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x \geq 1/2 \Leftrightarrow 0 \leq x < \pi/4$$

DRV^2 $f''(x) = -(2\,\text{senx}/\cos^3 x) - (2\cos x/\text{sen}^3 x)$ sempre negativa nell'intervallo