Soluzioni [A]

1.

C.E. $x \neq \pm \pi/3$ (punti di discontinuità di II specie)

SGN positiva in $\left[-\pi , -\pi/2 \right) \cup \left(-\pi/3 , \pi/3 \right) \cup \left(\pi/2 , \pi \right]$

ZERI $\pm \pi/2$

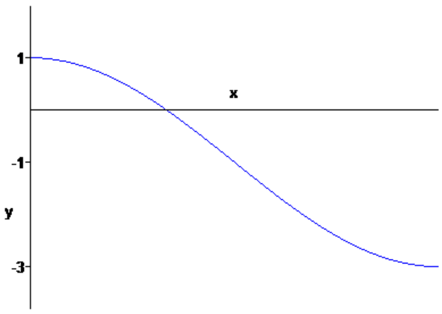
IMM $\dfrac{\cos x}{2\cos x - 1} = k \iff \cos x = \dfrac{k}{2k-1} \quad (k \neq 1) \iff x = \pm \arccos \dfrac{k}{2k-1} \quad \left(\left| \dfrac{k}{2k-1} \right| \leq 1 \right)$

L'immagine della funzione è dunque data da $(-\infty , 1/3] \cup [1 , +\infty)$

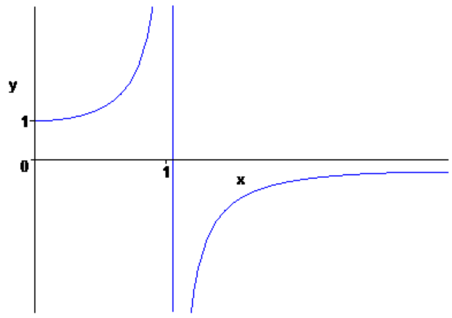
f^{-1} Il calcolo precedente prova che la funzione data non è invertibile (e questo si poteva dedurre direttamente dal fatto che la funzione è pari). Restringendo l'intervallo di definizione come richiesto dal problema, si scarta la soluzione negativa dell'equazione, ottenendo così l'iniettività con immagine che resta invariata.

GRF Tenendo conto della parità, basta studiarlo in $[0 , \pi]$.

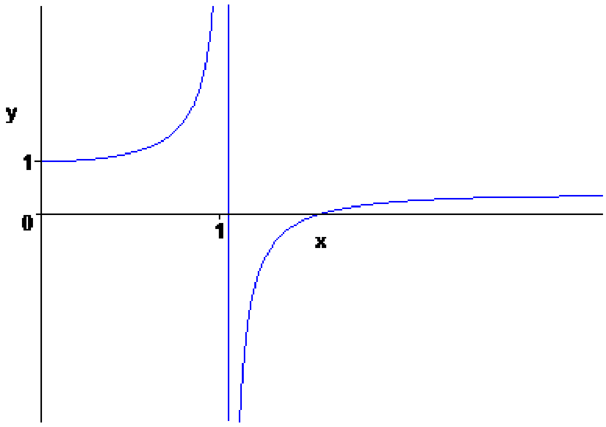
$y = 2 \cos x - 1$



$y = 1 / (2 \cos x - 1)$



$y = f (x)$



2.

- La successione è ben definita e positiva
- $x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x_n^{\ 2}+2}{3}} \geq x_n \Leftrightarrow x_n^{\ 2} \leq 1 \Leftrightarrow x_n \leq 1$ (si ricordi che è $x_n > 0$)
- $x_n < 1$ (si dimostra facilmente per induzione)
- Dunque la successione è crescente e tende al punto fisso 1.
- Di conseguenza, min = inf = 0 , max non esiste , sup = 1.

3.

$\exp (x^2 + \text{sen}x) = \exp (x + o (x)) = 1 + x + o (x)$

$\cos \sqrt{x + \text{tg}x} = \cos\sqrt{2x + o(x)} = 1 - x + o (x)$

Il numeratore si approssima dunque con 2 x.

$\log \text{sen}\, 4x - (x + 1) \log 5x \approx \log 4x - \log 5x = \log (4 / 5)$

Il limite è $2 / \log (4 / 5)$.

4.

Il campo di esistenza della funzione è $(0 , +\infty)$, quindi il limite ha senso.

Questo limite vale $-\infty$.

Per la verifica occorre provare che la disequazione $f (x) < -M$ ammette tra le sue soluzioni un intorno di $+\infty$.

$$\log\left(e^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}} - 1\right) < -M \Leftrightarrow e^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}} < 1 + e^{-M} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{x} < \log(1+e^{-M}) \Leftrightarrow$$

Poniamo $\log (1 + e^{-M}) = k > 0$.

$\Leftrightarrow x + 1 < k^2 x^2 \Leftrightarrow k^2 x^2 - x - 1 > 0$.

Tra le soluzioni ci sono i valori $x > \frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2k^2}$ che formano appunto un intorno di $+\infty$.

Soluzioni [B]

1.

C.E. $x \neq \pm \pi/2$ (punti di discontinuità di II specie)

SGN positiva in $[-\pi, -\pi/2) \cup (-\pi/3, \pi/3) \cup (\pi/2, \pi]$

ZERI $\pm \pi/3$

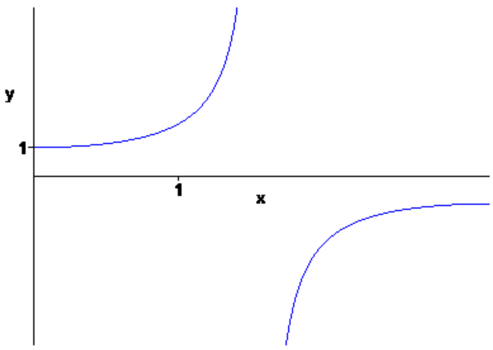
IMM $\frac{2\cos x - 1}{\cos x} = k \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2-k} \quad (k \neq 2) \Leftrightarrow x = \pm \arccos\frac{1}{2-k} \quad \left(\left| \frac{k}{2-k} \right| \leq 1 \right)$

L'immagine della funzione è dunque data da $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

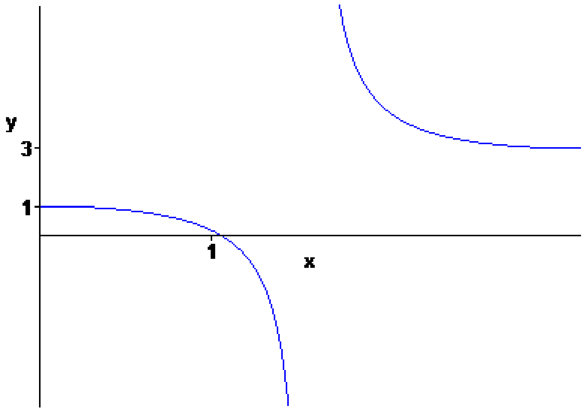
f^{-1} Il calcolo precedente prova che la funzione data non è invertibile (e questo si poteva dedurre direttamente dal fatto che la funzione è pari). Restringendo l'intervallo di definizione come richiesto dal problema, si scarta la soluzione negativa dell'equazione, ottenendo così l'iniettività con immagine che resta invariata.

GRF Tenendo conto della parità, basta studiarlo in $[0, \pi]$.

$y = 1 / \cos x$



$y = f(x)$



2.

- La successione è ben definita e positiva
- $x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2x_n^2+1}{6}} \geq x_n \Leftrightarrow x_n^2 \leq 1/4 \Leftrightarrow x_n \leq 1/2$ (si ricordi che è $x_n > 0$)
- $x_n < 1/2$ (si dimostra facilmente per induzione)
- Dunque la successione è crescente e tende al punto fisso 1/2.
- Di conseguenza, min = inf = 0 , max non esiste , sup = 1/2.

3.

$\exp(x^2 + tgx) = \exp(x + o(x)) = 1 + x + o(x)$

$\cos\sqrt{x + \mathrm{sen}x} = \cos\sqrt{2x + o(x)} = 1 - x + o(x)$

Il numeratore si approssima dunque con 2 x.

$\log 5x - \sqrt{x+1}\,\log 4x \approx \log 5x - \log 4x = \log(5/4)$

Il limite è 2 / log (5 / 4).

4.

Il campo di esistenza della funzione è (0 , +∞) , quindi il limite ha senso.

Questo limite vale +∞.

Per la verifica occorre provare che la disequazione f (x) > M ammette tra le sue soluzioni un intorno di +∞.

$$\log\left(e^{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} - 1\right) > M \Leftrightarrow e^{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} > 1 + e^M \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} > \log(1+e^M) \Leftrightarrow$$

Poniamo $\log(1+e^M) = k > 0$.

$\Leftrightarrow x^2 < k^2(x+1) \Leftrightarrow x^2 - k^2x - k^2 > 0$.

Tra le soluzioni ci sono i valori $x > \dfrac{k^2 + \sqrt{k^4 + 4k^2}}{2}$ che formano appunto un intorno di +∞.

Soluzioni [C]

1.

C.E. $x \neq \pm \pi/3$ (punti di discontinuità di II specie)

SGN positiva in $[-\pi, -\pi/2) \cup (-\pi/3, \pi/3) \cup (\pi/2, \pi]$

ZERI $\pm \pi/2$

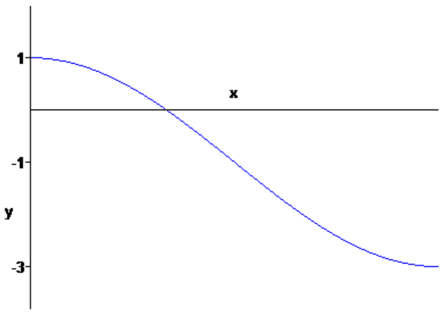
IMM $\frac{\cos x}{2\cos x - 1} = k \Leftrightarrow \cos x = \frac{k}{2k-1} \quad (k \neq 1) \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{k}{2k-1} \quad \left(\left| \frac{k}{2k-1} \right| \leq 1 \right)$

L'immagine della funzione è dunque data da $(-\infty , 1/3] \cup [1 , +\infty)$

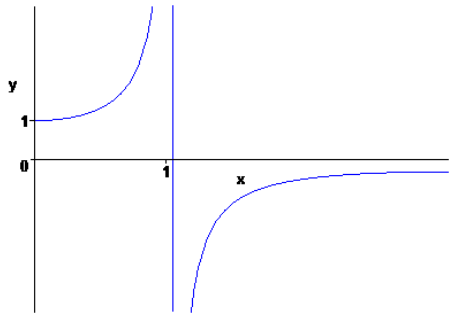
f^{-1} Il calcolo precedente prova che la funzione data non è invertibile (e questo si poteva dedurre direttamente dal fatto che la funzione è pari). Restringendo l'intervallo di definizione come richiesto dal problema, si scarta la soluzione negativa dell'equazione, ottenendo così l'iniettività con immagine che resta invariata.

GRF Tenendo conto della parità, basta studiarlo in $[0 , \pi]$.

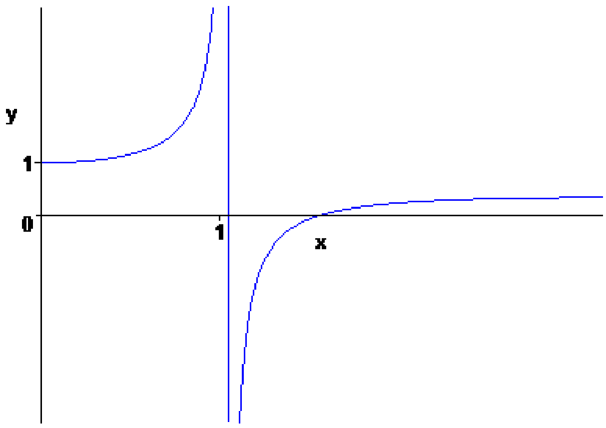
y = 2 cosx – 1



y = 1 / (2 cosx – 1)



y = f (x)



2.

- La successione è ben definita e positiva
- $x_{n+1} \geq x_n \iff \sqrt{\dfrac{x_n^{\,2}+8}{4}} \geq x_n \iff x_n^{\,2} \leq 8/3 \iff x_n \leq \sqrt{8/3}$ (si ricordi che è $x_n > 0$)
- $x_n < \sqrt{8/3}$ (si dimostra facilmente per induzione)
- Dunque la successione è crescente e tende al punto fisso $\sqrt{8/3}$.
- Di conseguenza, min = inf = 0 , max non esiste , sup = $\sqrt{8/3}$.

3.

$\exp(\operatorname{tg} x^2 + \operatorname{tg} x) = \exp(x + o(x)) = 1 + x + o(x)$

$\cos\sqrt{x+x^2} = \cos\sqrt{x+o(x)} = 1 - x/2 + o(x)$

Il numeratore si approssima dunque con $3x/2$.

$e^x \log \operatorname{sen} 3x - \log 4x \approx \log 3x - \log 4x = \log(3/4)$

Il limite è $3/(2\log(3/4))$.

4.

Il campo di esistenza della funzione è $(0, +\infty)$, quindi il limite ha senso.

Questo limite vale $-\infty$.

Per la verifica occorre provare che la disequazione $f(x) < -M$ ammette tra le sue soluzioni un intorno di $+\infty$.

$$\log\left(e^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}} - 1\right) < -M \iff e^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}} < 1 + e^{-M} \iff \frac{\sqrt{x+1}}{x} < \log(1+e^{-M}) \iff$$

Poniamo $\log(1+e^{-M}) = k > 0$.

$\iff x + 1 < k^2 x^2 \iff k^2 x^2 - x - 1 > 0$.

Tra le soluzioni ci sono i valori $x > \dfrac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2k^2}$ che formano appunto un intorno di $+\infty$.

Soluzioni [D]

1.

C.E. $x \neq \pm \pi/2$ (punti di discontinuità di II specie)

SGN positiva in $\left[-\pi , -\pi/2 \right) \cup \left(-\pi/3 , \pi/3 \right) \cup \left(\pi/2 , \pi \right]$

ZERI $\pm \pi/3$

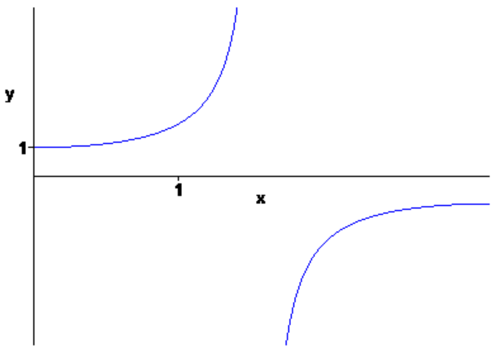
IMM $\dfrac{2\cos x - 1}{\cos x} = k \iff \cos x = \dfrac{1}{2-k} \quad (k \neq 2) \iff x = \pm \arccos \dfrac{1}{2-k} \quad \left(\left| \dfrac{k}{2-k} \right| \leq 1 \right)$

L'immagine della funzione è dunque data da $(-\infty , 1] \cup [3 , +\infty)$

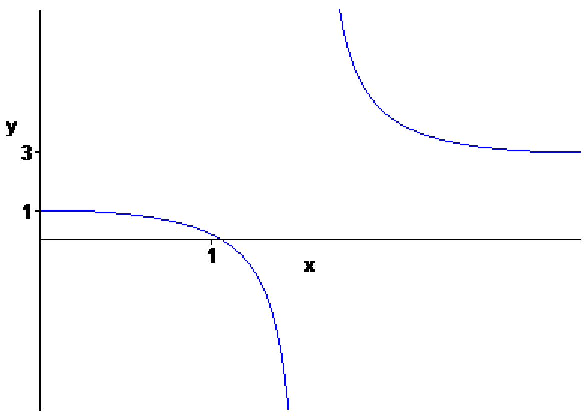
f^{-1} Il calcolo precedente prova che la funzione data non è invertibile (e questo si poteva dedurre direttamente dal fatto che la funzione è pari). Restringendo l'intervallo di definizione come richiesto dal problema, si scarta la soluzione negativa dell'equazione, ottenendo così l'iniettività con immagine che resta invariata.

GRF Tenendo conto della parità, basta studiarlo in $[0 , \pi]$.

$y = 1 / \cos x$



$y = f (x)$



2.

- La successione è ben definita e positiva

- $x_{n+1} \geq x_n \iff \sqrt{\dfrac{x_n^{\,2} + 32}{4}} \geq x_n \iff x_n^{\,2} \leq 32/3 \iff x_n \leq \sqrt{32/3}$ (si ricordi che è $x_n > 0$)

- $x_n < \sqrt{32/3}$ (si dimostra facilmente per induzione)

- Dunque la successione è crescente e tende al punto fisso $\sqrt{32/3}$.

- Di conseguenza, min = inf = 0 , max non esiste , sup = $\sqrt{32/3}$.

3.

$\exp(x^2 + x) = \exp(x + o(x)) = 1 + x + o(x)$

$\cos\sqrt{x + \mathrm{sen}x} = \cos\sqrt{2x + o(x)} = 1 - x + o(x)$

Il numeratore si approssima dunque con 2 x.

$\sqrt{x^2+1}\,\log 4x - \log 3x \approx \log 4x - \log 3x = \log(4/3)$

Il limite è $2 / \log(4/3)$.

4.

Il campo di esistenza della funzione è $(0, +\infty)$, quindi il limite ha senso.

Questo limite vale $+\infty$.

Per la verifica occorre provare che la disequazione $f(x) > M$ ammette tra le sue soluzioni un intorno di $+\infty$.

$$\log\left(e^{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} - 1\right) > M \iff e^{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} > 1 + e^M \iff \frac{x}{\sqrt{x+1}} > \log(1+e^M) \iff$$

Poniamo $\log(1+e^M) = k > 0$.

$\iff x^2 < k^2(x+1) \iff x^2 - k^2x - k^2 > 0.$

Tra le soluzioni ci sono i valori $x > \dfrac{k^2 + \sqrt{k^4 + 4k^2}}{2}$ che formano appunto un intorno di $+\infty$.