Soluzioni parte seconda [ A ]

1.

**f ( x )**

per $x \to 0$ $f(x) \approx 1/x$ non integrabile

per $x \to +\infty$ $f(x) \leq 1/x^{\alpha}$ integrabile

per $x \to -\infty$ stesso risultato, essendo f ( x ) una funzione dispari

**F ( x )**

C.E. $x \neq 0$

La funzione è pari e quindi possiamo limitarci a studiarla per x > 0.

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t\, e^{t^2}} =_{z=-t} \int_{x}^{2x} \frac{dz}{z\, e^{z^2}} = F(x)$$

SGN positiva

LIM per $x \to 0$ $F(x) \approx \int_{x}^{2x} \frac{dt}{t} \to \log 2$ discontinuità eliminabile

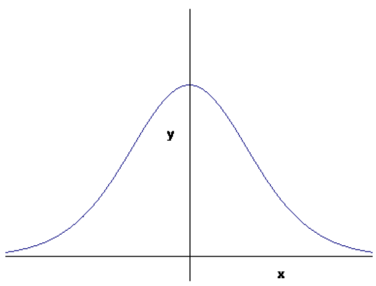
per $x \to +\infty$ $F(x) \to 0$

DRV $F'(x) = \frac{1}{x\, e^{4x^2}} - \frac{1}{x\, e^{x^2}} \geq 0 \iff e^{x^2} > e^{4x^2} \iff x^2 > 4\, x^2$ mai verificata

Dunque F è decrescente ( nel dominio in cui la stiamo studiando )

per $x \to 0$ $F'(x) = \frac{e^{x^2} - e^{4x^2}}{x\, e^{5x^2}} \approx \frac{(1+x^2)-(1+4x^2)}{x} = -3x \to 0$

$F'(0) = 0.$




2.

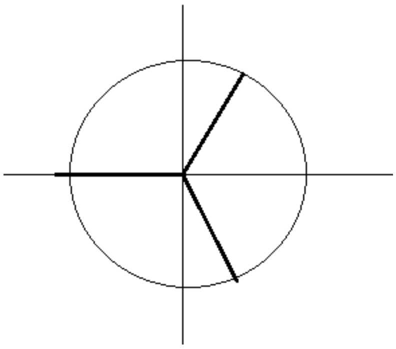
Il polinomio caratteristico $k^3 + 1$ ha per radici -1 , $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ( vedi disegno sotto )

Una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è dunque formata dalle funzioni

$e^{-x} \qquad e^{x/2} \cos(\sqrt{3}\, x / 2) \qquad e^{x/2} \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, x / 2)$

Per cercare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso con termine noto $e^{ix}$ . Cerchiamo una soluzione della forma $A\, e^{ix}$ . Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $A = 1 / ( 1 - i ) = ( 1 + i ) / 2$ .

Una soluzione particolare reale è dunque la parte reale del prodotto $( 1 + i )( \cos x + i \operatorname{sen} x ) / 2$ , cioè $( \cos x - \operatorname{sen} x ) / 2$.



3.

L'integrale esiste perché per $x \to 1$ $f(x)$ è infinito di ordine ½.

Ponendo $x = \operatorname{sen} t$ , si ottiene $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\operatorname{sen} t}$

Ponendo poi $z = \operatorname{tg}( t / 2 )$ , si ottiene $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dz}{(1+z)^2} = \left[ -\frac{2}{1+z} \right]_0^1 = 1$

4.

- E' sufficiente imporre che risulti $f''(x) = e^x ( k + 2 \operatorname{sen} x ) > 0 \quad \forall x \in ( -\pi/3 , \pi/3 )$ , cioè $\operatorname{sen} x > - k / 2$.

Poiché nell'intervallo indicato la funzione seno assume i valori $( -\sqrt{3} / 2 , \sqrt{3} / 2 )$ , deve essere $- k / 2 \le -\sqrt{3} / 2$ , cioè $k \ge \sqrt{3}$ .

- Deve essere $f''(0) = 0$ e questo accade per $k = 0$. Poiché per tale valore di k risulta $f'''(0) = 2$ (non riportiamo il calcolo, che non presenta alcuna difficoltà) , la condizione è sufficiente a garantire che 0 sia punto di flesso (applicazione della formula di Taylor).