Soluzioni [1]

1.

- $\forall M>0,\ \exists \delta>0 :\ \forall x \in A,\ 0<|x+1|<\delta \Rightarrow f(x)<-M$

- Studiamo la disep. $\frac{x}{(x+1)^2} < -M$ per $x \neq -1$.

$Mx^2+(2M+1)x+M<0$

$$\frac{-1-2M-\sqrt{4M+1}}{2M} < x < \frac{-1-2M+\sqrt{4M+1}}{2M}$$

$-1-\frac{1+\sqrt{4M+1}}{2M} < x < -1+\frac{\sqrt{4M+1}-1}{2M}$ che è appunto intorno di -1.

2.

- Per $n=1$ è vera: $1 = 1\cdot 2\cdot 3/6$.

Supponiamola vera per n e proviamola per $n+1$:

$$\sum_{K=1}^{n+1} K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

La verifica dell'uguaglianza non presenta difficoltà.

- Dividiamo l'intervallo $[0,2]$ in n intervalli di ampiezza $2/n$ mediante i punti $0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots \frac{2K}{n}, \dots, 2$

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{K=0}^{n} f\left(\frac{2K}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{K=0}^{n}\frac{4K^2}{n^2} = \frac{4}{n^3}\sum_{K=0}^{n}K^2 = \frac{4}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{4}{3}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{4}{3}.$$

3. $f(t) = \frac{1}{t \operatorname{sen} t}$

I punti di discontinuità più vicini all'estremo fisso di integrazione sono 0 e π; la funzione non è integrabile nell'intorno di questi punti. Infatti:

per $t \to 0$ $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$; per $t \to \pi$ $f(t) \sim \frac{1}{\pi(\pi-t)}$.

$F(x)$:

C.E. $(0,\pi)$

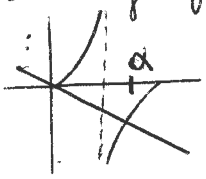
SGN $\underset{0}{(}\ -\ \underset{1}{\overset{0}{|}}\ +\ \underset{\pi}{)}$

LIM per $x\to 0^+$ $F(x)\to -\infty$, per $x \to \pi^-$ $F(x) \to +\infty$

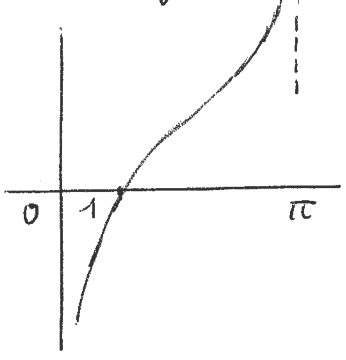
DRV $F'(x) = 1/x \operatorname{sen} x > 0$

DRV^2 $F''(x) = -\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} \geqslant 0 \iff -\operatorname{sen} x - x\cos x \geqslant 0$
$\iff \operatorname{sen} x + x\cos x \leqslant 0.$

Questa è falsa in $(0,\pi/2)$; in $(\pi/2,\pi)$ si studia graficamente risolvendola nella forma $\operatorname{tg} x \geqslant -x$:



$\underset{0}{|}\ \overset{-}{\text{———}}\ \underset{\frac{\pi}{2}}{|}\ \text{——}\ \underset{\alpha}{\overset{0}{|}}\ \overset{+}{\text{——}}\ \underset{\pi}{|}$



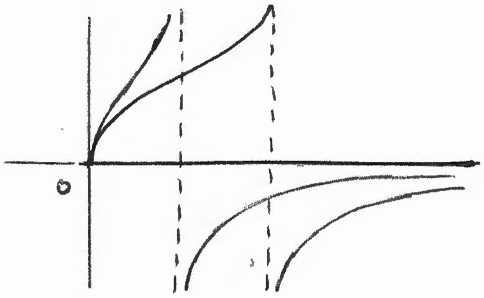
4. C.E. $x>0$ (dato), $y \in \mathbb{R}$

SLZ COSTANTI $y=0$.

Studiamo l'eq. per $y>0$ e $y<0$:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \lg x - c \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{c-\lg x}$$ per $x<e^c$ le slz. positive
per $x>e^c$ le slz. negative



$$y' = \frac{1}{x(c-\lg x)^2} \to +\infty \text{ per } x \to 0.$$

5. Usando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova convergenza per $e^{-x}<1$, cioè $x>0$. Per $x=0$ le due serie divergono.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1} \quad \text{per } x>0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -\sum_{n=0}^{\infty} -n e^{-nx} = -\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-nx})' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\right)' =$$

$$= -\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}.$$

Soluzioni [2]

1\. . $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 : \ \forall x \in A,\ x < -M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$

. Studiamo la disep. $\left|\frac{1-2x}{1-x^2}\right| < \varepsilon$. Possiamo supporre $x < -1$, il che rende negativa la fz. dentro valore assoluto. Si ha dunque:

$$\frac{1-2x}{x^2-1} < \varepsilon \Longleftrightarrow \varepsilon x^2 + 2x - 1 - \varepsilon > 0 \Longleftrightarrow x < \frac{-1-\sqrt{1+\varepsilon+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \lor x > \frac{-1+\sqrt{1+\varepsilon+\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

In particolare, $x < \frac{-1-\sqrt{1+\varepsilon+\varepsilon^2}}{\varepsilon} = -M.$

2\. . Per la verifica vedere [1]

. Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n intervalli di ampiezza $1/n$ mediante i punti $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, 1$.

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}.$$

$$\ell = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

3\. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{sen}\,t}$

I punti di discontinuità più vicini all'estremo fisso di integrazione sono 0 e π; la funzione non è integrabile nell'intorno di questi punti. Infatti:

per $t \to 0$ $f(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$; per $t \to \pi$ $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(\pi - t)}$.

$F(x)$:

C.E. $(0, \pi)$

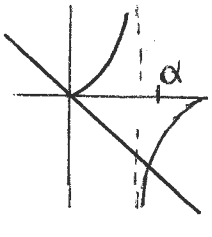
LIM per $x \to 0^+$ $F(x) \to -\infty$, per $x \to \pi^-$ $F(x) \to +\infty$

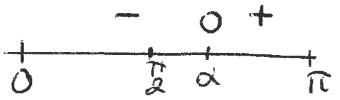
DRV $F'(x) = 1/\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x > 0$

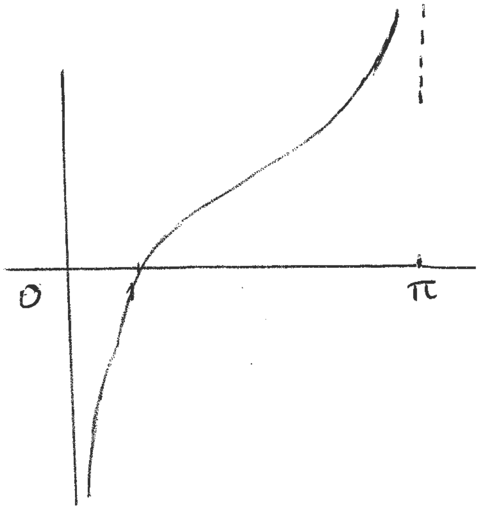
SGN $\underset{0}{(}\ -\ \underset{1}{0}\ +\ \underset{\pi}{)}$

DRV² $F''(x) = -\frac{\mathrm{sen}\,x + 2x\cos x}{2x^{3/2}\,\mathrm{sen}^2 x} \geq 0 \iff \begin{array}{l} -\mathrm{sen}\,x - 2x\cos x \geq 0 \\ \mathrm{sen}\,x + 2x\cos x \leq 0 \end{array}$

Questa è falsa in $(0, \pi/2)$; in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ si studia graficamente, riscrivendola nella forma $\mathrm{tg}\,x \geq -2x$.







4. C.E. $x>1$ (dato), $y\in\mathbb{R}$

SLZ COSTANTI $y=1$

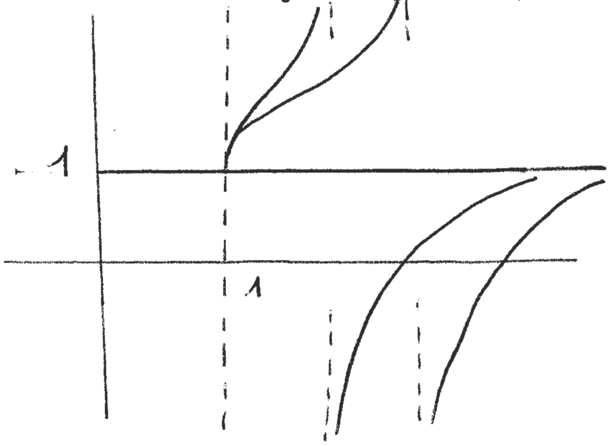
Studiamo l'eq. per $y>1$ e $y<1$:

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow -\frac{1}{y-1} = \lg(x-1) - c$$

$$y = 1 + \frac{1}{c - \lg(x-1)}$$

per $x < e^c+1$ le slz. con $y>1$

per $x > e^c+1$ le slz. con $y<1$



$$y' = \frac{1}{(x-1)(c-\lg(x-1))^2} \to +\infty \quad \text{per } x\to 1^+$$

5. Usando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova convergenza per $e^{-x^2}<1$, cioè $\forall x\neq 0$. Per $x=0$ la prima serie diverge, la seconda converge (a 0).

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x^2})^n = \frac{1}{1-e^{-x^2}} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x e^{-nx^2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} -2nx\, e^{-nx^2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-nx^2}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2} D\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}\right)' = \frac{x e^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}.$$