

Soluzioni [1]

1.

$$f(t) = \frac{\lg(1+t)}{t} \quad \frac{\delta_i + \delta_i + n\delta}{-1 \quad 0 \quad +\infty}$$

per $t \rightarrow 0$ $f(t) \rightarrow 1$ disc. elim.
 per $t \rightarrow -1^+$ $f(t) \sim -\lg(1+t) < \frac{1}{(t+1)^\alpha}$
 scegliamo $\alpha < 1$
 per $t \rightarrow +\infty$ $f(t) \sim \frac{\lg t}{t} > \frac{1}{t}$

$F(x)$ C.E. $[-1, +\infty)$
 SGN $\begin{array}{c} + \quad - \quad 0 \quad + \\ -1 \quad 0 \end{array}$

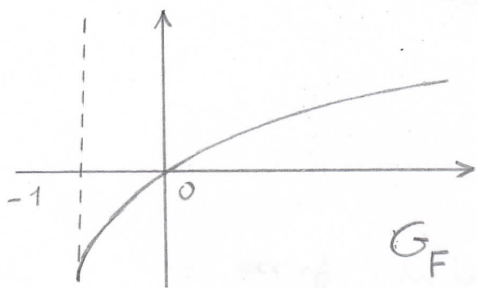
LIM per $x \rightarrow -1^+$ $F(x) \rightarrow C \in \mathbb{R}$
 per $x \rightarrow +\infty$ $F(x) \rightarrow +\infty$
 $F(0) = 0$

DRV $\frac{\lg(1+x)}{x} \quad \begin{array}{c} -\infty \quad + \quad 1 \quad + \\ -1 \quad 0 \end{array}$
 \uparrow pto a tg. verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 non c'è asintoto

DRV² $\frac{x - (1+x) \lg(1+x)}{x^2(1+x)}$

Il segno è quello del numeratore $N(x)$.
 Poiché $N'(x) = -\lg(1+x)$, $x=0$ è pto di max.
 Essendo $N(0) = 0$, deduciamo $N(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$, e questo è anche il segno della derivata seconda



2.

$x \in \mathbb{R}, y > 1$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}(y-1)} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\lg \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1} = \frac{x^2}{2} + c$$

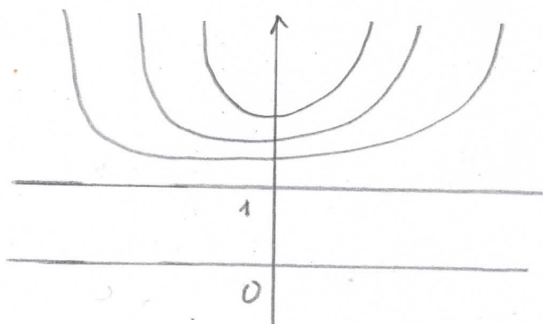
$$\sqrt{y} = \frac{1 + Ke^{x^2/2}}{1 - Ke^{x^2/2}} \quad (K > 0)$$

$$y = \left(\frac{1 + Ke^{x^2/2}}{1 - Ke^{x^2/2}} \right)^2$$

due essere $\frac{1 + Ke^{x^2/2}}{1 - Ke^{x^2/2}} > 1 \rightarrow \frac{2Ke^{x^2/2}}{1 - Ke^{x^2/2}} > 0 \rightarrow e^{x^2/2} < \frac{1}{K}$

$$x^2 < \lg \frac{1}{K^2} \rightarrow |x| < \sqrt{\lg \frac{1}{K^2}} \quad (0 < K < 1)$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}(y-1)} = \int \frac{2}{z^2-1} dz = \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \lg \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c = \lg \left| \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1} \right| + c$$



3.

Per le parti di teoria si rimanda al manuale.

Nel calcolo dell'integrale si pone

$$\sqrt{\frac{e^x}{e^x-1}} = t \rightarrow x = \lg \frac{t^2}{t^2-1} \rightarrow dx = \frac{-2}{t(t^2-1)} dt$$

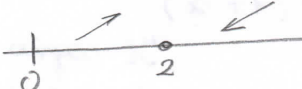
$$\int_{\sqrt{e/e-1}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1} dt = \left[\lg \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_{\sqrt{e/e-1}}^{+\infty} = \lg \frac{\sqrt{e} + \sqrt{e-1}}{\sqrt{e} - \sqrt{e-1}}$$

4. Si rimanda al manuale.

5. la successione è ben definita e positiva

$a_1 > 0$ è un dato

$a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ definito e positivo

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow a_n \leq 2$$


$$a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$$

$a_1 < 2$ è un dato

$$\sqrt{a_n+2} < 2 \Leftrightarrow a_n < 2$$

la successione è crescente e tende al punto fisso 2.

Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2-a_n)$ con il criterio del rapporto (serie a segno positivo):

$$\frac{2-a_{n+1}}{2-a_n} = \frac{2-\sqrt{2+a_n}}{2-a_n} = \frac{2-a_n}{(2-a_n)(2+\sqrt{2+a_n})} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

La serie converge.

Soluzioni [2]

1. $f(t) = \frac{\lg t}{t+1}$ $\frac{\text{Sg} + \text{Sg} + \text{no}}{0 \quad 1 \quad +\infty}$ per $t \rightarrow 0$ $f(t) \sim -\lg t < \frac{1}{t^\alpha}$ scegliamo $\alpha < 1$
 per $t \rightarrow 1$ $f(t) \rightarrow 1$ disc. eliminabile
 per $t \rightarrow +\infty$ $f(t) \sim \frac{\lg t}{t} > \frac{1}{t}$

$F(x)$ C.E. $[0, +\infty)$
 SGN $\frac{- \quad 0 \quad +}{0 \quad 1}$

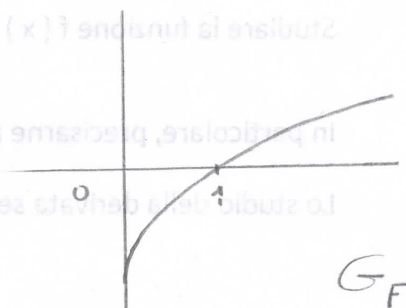
LIM per $x \rightarrow 0^+$ $F(x) \rightarrow c \in \mathbb{R}^-$
 per $x \rightarrow +\infty$ $F(x) \rightarrow +\infty$
 $F(1) = 0$

DRV $\frac{\lg x}{x-1}$ $\frac{+\infty \quad + \quad 1 \quad +}{0 \quad 1}$
 \hookrightarrow pto a tg. verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 non c'è asintoto

DRV² $\frac{x-1-x \lg x}{x(x-1)^2}$

Il segno è quello del numeratore $N(x)$.
 Poiché $N'(x) = -\lg x$, $x=1$ è punto di massimo.
 Essendo $N(1) = 0$, deduciamo $N(x) < 0 \quad \forall x \neq 1$, e
 questo è anche il segno della derivata seconda.



2. $x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1$
 $\int \frac{dy}{\sqrt{y}(y-1)} = \frac{x^2}{2} + c$

$\lg \frac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}} = \frac{x^2}{2} + c$

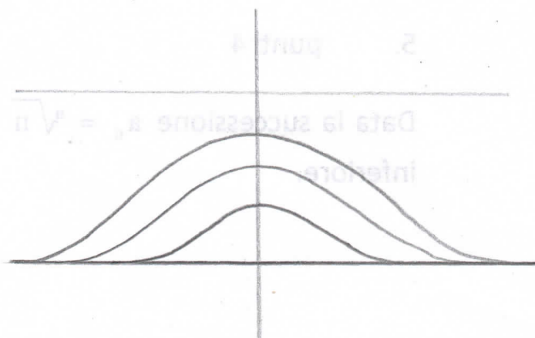
$\sqrt{y} = \frac{1 - Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}}$

$y = \left(\frac{1 - Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}} \right)^2$

Deve essere $0 < \frac{1 - Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}} < 1 \rightarrow \begin{cases} 1 - Ke^{x^2/2} > 0 \\ \frac{-2Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}} < 0 \end{cases} \rightarrow e^{x^2/2} < \frac{1}{K}$
 $x^2 < \lg \frac{1}{K^2} \rightarrow |x| < \sqrt{\lg \frac{1}{K^2}} \quad (0 < K < 1)$

Le soluzioni si possono prolungare su tutto \mathbb{R} saldandole con la bz. nulla, che è soluzione costante.

$\int \frac{dy}{\sqrt{y}(y-1)} \stackrel{z=\sqrt{y}}{=} \int \frac{2}{z^2-1} dz$
 $= \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz$
 $= \lg \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c$
 $= \lg \left| \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1} \right| + c$



3. Per le parti di teoria si rimanda al manuale.
 Nel calcolo dell'integrale si pone

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} = t \rightarrow x = \frac{t^2}{t^2-1} \rightarrow dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$\int_1^{\infty} \frac{2t(t-1)}{(t^2-1)^2} dt = \int_1^{\infty} \frac{2t}{(t-1)(t+1)^2} dt$$

Si cerca una scomposizione della forma

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \left(\frac{C}{t+1}\right)^2$$

ottenendo

$$\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} - \left(\frac{1}{t+1}\right)^2$$

$$y = \left[\frac{1}{2} \lg \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t+1} \right]_1^{\infty} = +\infty$$

4. Si rimanda al manuale.

5. Il calcolo è del tutto analogo a quello sviluppato in [1].
 La successione tende (crescendo) al punto fisso 3; la serie
 $\sum_{n=1}^{\infty} (3 - a_n)$ converge, dato che il criterio del rapporto porta
 al limite $\frac{1}{6} < 1$.