Soluzioni

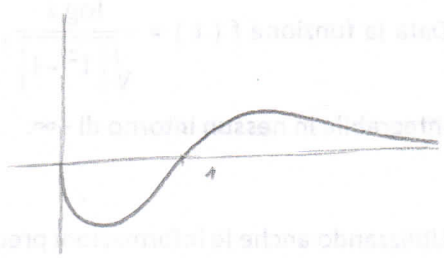
1. $f(t) = \dfrac{\lg t}{t^2 - 1}$ $\qquad$ $\begin{array}{ccccc} \text{sì} & \oplus & \text{sì} & \oplus & \text{sì} \\ 0 & & 1 & & +\infty \end{array}$

per $t \to 0$ $\quad f(t) \sim -\lg t < \dfrac{1}{t^\alpha}$; scegliamo $\alpha < 1$

per $t \to 1$ $\quad f(t) \sim \dfrac{t-1}{(t-1)(t+1)} \to \dfrac{1}{2}$; disc. eliminabile

per $t \to +\infty$ $\quad f(t) \sim \dfrac{\lg t}{t^2} < \dfrac{t^\alpha}{t^2} = \left(\dfrac{1}{t}\right)^{2-\alpha}$; si sceglie α t.c. sia $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$$



CE $\quad x \geq 0$

SGN $\quad F(x) > 0$ se $x^2 > x$ $\qquad \begin{array}{ccc} & \ominus & \oplus \\ 0 & 1 & \end{array}$

$F(0) = 0$, $F(1) = 0$

LIMITI $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad F(x) \to 0$

DRV $\quad F'(x) = \dfrac{\lg x}{x^2 - 1}\left(\dfrac{4x}{x^2+1} - 1\right) \geq 0 \iff x^2 - 4x + 1 \leq 0$

$\begin{array}{ccccccc} \times & \text{- - -} & \circ & & \times & & \circ \text{ -} \\ 0 & & 2-\sqrt{3} & & 1 & & 2+\sqrt{3} \end{array}$

per $x \to 0$ $\quad F'(x) \sim \lg x \to -\infty$

per $x \to 1$ $\quad F'(x) \to \dfrac{1}{2}$

2. l'integrale è improprio perchè l'estremo -1 annulla il denominatore ; poichè la fz diverge con ordine $1/2$, l'integrale esiste.

$x^2 - x - 2 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4}$

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{(2x-1)^2}{4}}} = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}}$$

Si pone $\dfrac{2x-1}{3} = \operatorname{sen} t$, $dx = \dfrac{3}{2}\cos t\,dt$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{1}{3}} dt = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{3}.$$

3. CE $\quad x \in \mathbb{R}$, $0 < y \leq 1$

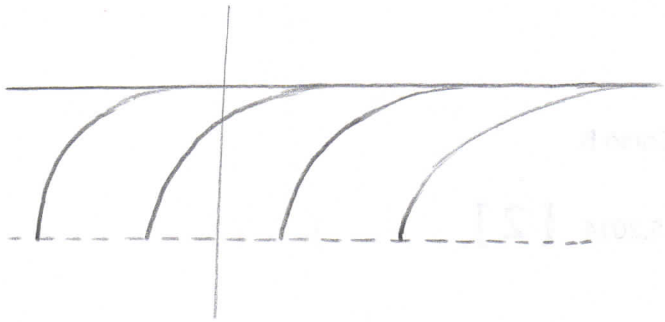
$y = 1$ soluzione costante

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int dx \to -\sqrt{1-y^2} = x - c \to \sqrt{1-y^2} = c - x \to$$

$1 - y^2 = (c-x)^2$ con $c - x > 0$, cioè $\boxed{x < c}$

$y = \sqrt{1 - (c-x)^2}$ con $1 - (c-x)^2 > 0$, cioè $-1 < c - x < 1$, cioè $\boxed{c-1 < x < c+1}$

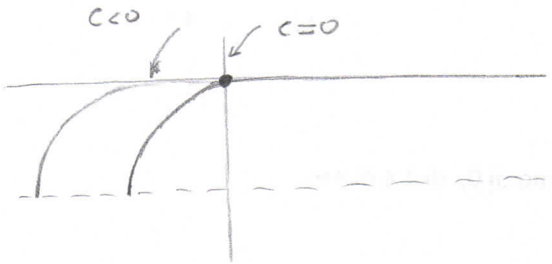
In definitiva, $\boxed{c - 1 < x < c}$



Le soluzioni si saldano con la soluzione costante per $x = c$ e dunque possono essere prolungate definendole costanti per $x \geq c$.

$y(0) = \frac{1}{2}$ per $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ unicità

$y(0) = 1$ per $c = 0$ non c'è unicità



4. $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

converge $\forall x \in \mathbb{R}$ (ad es. con il criterio del rapporto).

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}$$

che è una serie convergente per il teorema di Leibniz. Sempre per questo teorema si ha

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{(2n+3)!\,(2n+3)} < \frac{1}{10^3} \quad \text{se } n \geq 2$$

$$I \sim 1 - \frac{1}{3!\,3} + \frac{1}{5!\,5} = \cdots$$

Soluzioni [2]

1. $f(t) = \dfrac{\lg t}{\sqrt{t}\,(t^2-1)}$

sì ⊕ sì ⊕ sì

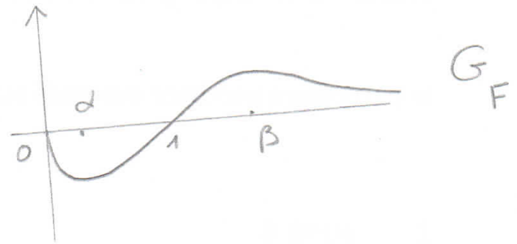
$0 \qquad 1 \qquad +\infty$

per $t \to 0$ $\quad f(t) \sim -\dfrac{\lg t}{\sqrt{t}} < \dfrac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$; scegliamo α in modo che sia $\alpha + \frac{1}{2} < 1$, cioè $\alpha < \frac{1}{2}$

per $t \to 1$ $\quad f(t) \sim \dfrac{t-1}{2(t-1)} \to \dfrac{1}{2}$; disc. eliminabile

per $t \to +\infty$ $\quad f(t) \sim \dfrac{\lg t}{t^{5/2}} < \left(\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{5}{2}-\alpha}$; scegliamo α in modo che sia $\frac{5}{2} - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 3/2$

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$$



C.E. $\quad x \geq 0$

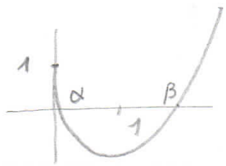
SGN $\quad F(x) > 0$ se $x^2 > x$ $\qquad$ ⊖ ⊕ $\quad 0 \quad 1$

LIMITI $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad F(x) \to 0$

DRV $\quad F'(x) = \dfrac{\lg x}{x^2-1}\left(\dfrac{4}{x^2+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \geq 0 \iff x^2 - 4\sqrt{x} + 1 \leq 0$

$\varphi(x) = x^2 - 4\sqrt{x} + 1$

$\varphi'(x) = 2x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$



- - - o———————o - - - - sgn F'

$0 \quad \alpha \quad 1 \quad \beta$

per $x \to 0$ $\quad F'(x) \sim \dfrac{\lg x}{\sqrt{x}} \to -\infty$

per $x \to 1$ $\quad F'(x) \sim \dfrac{1}{x+1} \to \dfrac{1}{2}$

2. l'integrale è improprio perché l'estremo 1 annulla il denominatore; poiché la fz. diverge con ordine ½, l'integrale esiste.

$x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x+1}{3}\right)^2}}$$

si pone $\dfrac{2x+1}{3} = \operatorname{sen} t$, $\quad dx = \dfrac{3}{2}\cos t\,dt$

$$\int_{\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}}^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}.$$

3. C.E. $\quad x \in \mathbb{R}$, $\; 0 < y \leq 2$

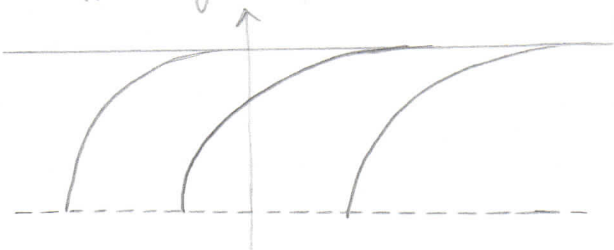
$y = 2$ soluzione costante

$\displaystyle\int \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy = \int dx \longrightarrow -\sqrt{4-y^2} = x - c \longrightarrow \sqrt{4-y^2} = c - x \longrightarrow$

$4 - y^2 = (c-x)^2$ con $c - x > 0$, cioè $\boxed{x < c}$

$y = \sqrt{4-(c-x)^2}$ con $4-(c-x)^2>0$, cioè $-2<c-x<2$, cioè $\boxed{c-2<x<c+2}$

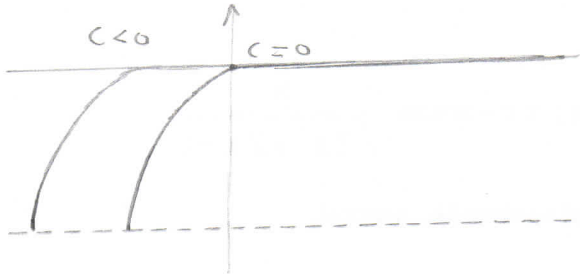
In definitiva, $c-2<x<c$.



Le sol. si saldano con la soluzione costante per $x=c$ e dunque possono essere prolungate definendole costanti per $x \geq c$

$y(0)=1$ per $c=\sqrt{3}$ unicità

$y(0)=2$ per $c=0$ non c'è unicità



4. $\lg(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $\qquad \frac{\lg(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$

converge $\forall x \in (-1,1)$ (ad es. con il criterio del rapporto). Converge anche per $x=1$ (Leibniz).

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{x}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

che è una serie convergente per il teorema di Leibniz. Sempre per questo teorema si ha:

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{10} \quad \text{per } n \geq 3.$$

$$I \sim 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \dots$$