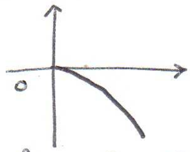
Soluzioni

1. La successione è ben definita e positiva.

$x_{n+1} \le x_n \iff \lg(1+x_n^2) \le x_n \iff x_n \geq 0$

Infatti: $\varphi(x) = \lg(1+x^2) - x$

$\varphi'(x) = -(x-1)^2/(x^2+1)^2$



Dunque la successione è decrescente e limitata inferiormente; questo assicura che ammette limite finito, che è l'unico punto fisso, cioè 0.

Per studiare $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, usiamo il criterio del rapporto: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lg(1+x_n^2)}{x_n} \sim \frac{x_n^2}{x_n} = x^n \to 0 < 1$. Dunque la serie converge.

2. C.E. $\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{|2x-1|}{x^2} \le 1 \end{cases} \iff x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}, +\infty)$

SGN positiva; nulla per $x = \frac{1}{2}$

LIM per $x \to \pm\infty$ $f(x) \sim \sqrt{\frac{|2x|}{x^2}} = \sqrt{\frac{2}{|x|}} \to 0^+$

Questo prova anche che l'area richiesta esiste finita.

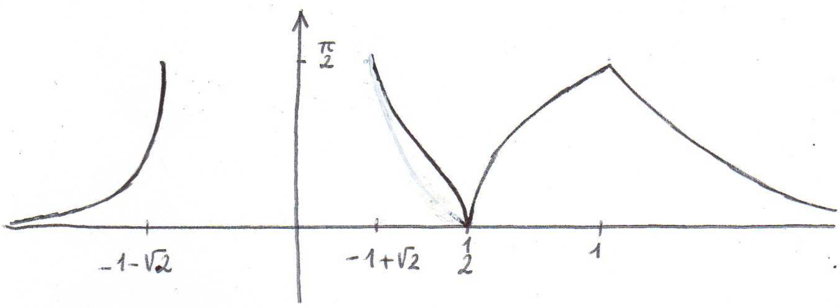
$f(-1 \pm \sqrt{2}) = \pi/2$

DRV $f'(x) = \dfrac{x^2(1-x)\,\mathrm{sgn}(2x-1)}{\sqrt{x^2-|2x-1|}\ \sqrt{|2x-1|}\ x^3}$

$x \neq -1 \pm \sqrt{2}$ punto a tg. verticale

$x \neq 1/2$ punto di cuspide

$x \neq 1$ punto angoloso



3. $\displaystyle\int \frac{-\cos x \, dx}{(1-\sin^2 x)\sqrt{1-\sin x}} \underset{\sin x = t}{=} \int \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t}} \underset{\sqrt{1-t} = z}{=} \int \frac{2\,dz}{(z^2-1)^2-1} = \int \frac{2\,dz}{(z^2-2)\,z^2}$

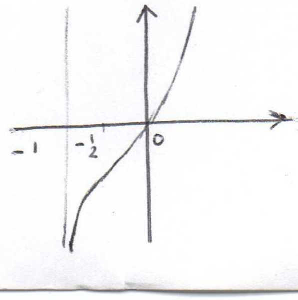
$\underset{\text{HERMITE}}{=} \displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\,(z+\sqrt{2})} - \frac{1}{2\sqrt{2}\,(z-\sqrt{2})} - \frac{1}{z^2} \right) dz =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \lg\left|\dfrac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}\right| + \dfrac{1}{z} + c \qquad z = \sqrt{1-\sin x}$

4. $f(t)$ si $-$ no $+$ no

$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$

G_F



$F(x)$

CE $x > -1$

SGN $-$ / $+$ (-1, 0)

LIM per $x \to -1^+$ $F(x) \to -\infty$

per $x \to +\infty$ $F(x) \to +\infty$ senza asintoto

$F(0) = 0$

DRV $F'(x) = e^{2x}/1+x > 0$

$F''(x) = e^{2x}(1+2x)/(1+x)^2$

$F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$