1.

. Essendo $2-x+x^2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \ (\Delta<0)$, la successione è ben definita e positiva.

. $x_{n+1}\leq x_n \iff \sqrt{2-x_n+x_n^2}\leq x_n \iff x_n\geq 2$

. $x_n>2 \Rightarrow x_{n+1}>2$

Infatti $\sqrt{2-x_n+x_n^2}>2 \iff x_n^2-x_n-2>0 \iff x_n<-1 \vee x_n>2$

Dunque la successione è decrescente ed ha 2 come punto fisso; ne deduciamo che $\max=\sup=4$, min non $\exists$, $\inf=\lim=2$.

2.

$N\sim \lg(1+5x)\sim 5x \qquad D\sim \left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{1/4}-\left(1+2x\right)^{1/4}\sim -\frac{1}{2}x$

limite $=-10$

3. C.E. $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}>0\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 1 \vee x\leq -1 \\ \sqrt{x^2-1}<x\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x^2-1}<x\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-1<x^2\end{cases} \iff x\geq 1$

SGN. $f(x)\geq 0 \iff \begin{cases} x\geq 1 \\ x-\sqrt{x^2-1}\geq 1\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x^2-1}\leq x-1\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-1\leq x^2-2x+1\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 1\end{cases}$

Dunque $f(x)<0$ nel suo C.E., eccetto che per $x=1$ in cui si annulla.

$\lg(x-\sqrt{x^2-1})=\alpha \iff \sqrt{x^2-1}=x-e^\alpha \iff \begin{cases} x\geq e^\alpha \\ x=\dfrac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha}\end{cases}$

Dobbiamo controllare che sia $x\geq 1$:

$$\frac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha}\geq 1 \iff e^{2\alpha}+1\geq 2e^\alpha \iff (e^\alpha-1)^2\geq 0 \quad \text{sempre vera.}$$

Infine deve essere $x\geq e^\alpha$:

$$\frac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha}\geq e^\alpha \iff e^{2\alpha}+1\geq 2e^{2\alpha} \iff e^{2\alpha}\leq 1 \iff \alpha\leq 0.$$

Questo prova che $\operatorname{Im} f=(-\infty,0]$.

Inoltre f è invertibile e $f^{-1}(\alpha)=\dfrac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha}$.

La f.z. f (continua e invertibile su un intervallo) è monotona.

Poiché f è negativa e $f(1)=0$, è necessariamente decrescente.

4.

$z=0$ è soluz., $\forall w\in\mathbb{C}$.

Se $z\neq 0$, dalla seconda eq. si deduce $\bar{w}=-\bar{z}/z^2$, ovvero $w=-z/\bar{z}^2$.

Sostituendo nella prima eq., si ottiene $\bar{z}^2+z^2|z|^2/\bar{z}^4=0$, cioè $\bar{z}^6=-z^2|z|^2$.

In forma esponenziale: $r^6e^{-6i\theta}=r^4e^{i(2\theta+\pi)}$ da cui: $r=1$, $-6\theta=$ $=2\theta+\pi-2k\pi$, cioè $\theta=-\pi/8+k\pi/4$ $(k=0,\dots,7)$.

Dai valori di z si deducono quelli di w.

5.

Fissato $\varepsilon>0$, dobbiamo provare che la disequazione

$$\left|\lg\sqrt{\frac{4+x}{4-x}}-\lg\sqrt{3}\right|<\varepsilon$$

ha un intorno di 2 tra le sue soluzioni (in realtà il punto 2 potrebbe anche essere escluso, ma in questo caso si vede subito che è compreso).

$$\left| \lg \sqrt{\frac{4+x}{3(4-x)}} \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \lg \sqrt{\frac{4+x}{3(4-x)}} < \varepsilon \iff e^{-2\varepsilon} < \frac{4+x}{3(4-x)} < e^{2\varepsilon}$$

Nel C.E. della funzione risulta $4-x>0$, dunque

$$3(4-x)e^{-2\varepsilon} < 4+x < 3(4-x)e^{2\varepsilon} \iff \frac{4(3e^{-2\varepsilon}-1)}{3e^{-2\varepsilon}+1} < x < \frac{4(3e^{2\varepsilon}-1)}{3e^{2\varepsilon}+1}.$$

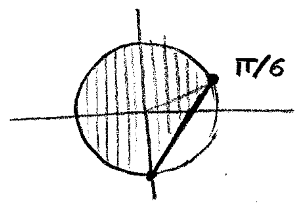
Essendo $\varepsilon>0$, è facile verificare che quello trovato è un intorno di 2.

6.

$\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x + 1 \geq 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X + 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



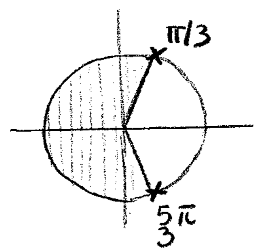
$2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x - 5\cos x > 0$

$\Updownarrow$

$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 > 0$

$\Updownarrow$

$\cos x > 2$ IMPOSS. $\vee$ $\cos x < \frac{1}{2}$



SLZ:

$x \in [0, \pi/6] \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\pi] \cup (\frac{5}{3}\pi, 2\pi] \quad + 2k\pi.$

1.

- Perché la successione sia ben definita, deve risultare $x_n \neq -1$.
  Per induzione si dimostra che è $x_n > 0$.
- $x_{n+1} \geq x_n \iff \frac{2+x_n^2}{1+x_n} \geq x_n \iff 2+x_n^2 \geq x_n + x_n^2 \iff x_n \leq 2$
- Proviamo che $x_n < 2 \Rightarrow x_{n+1} < 2$.
  Infatti $\frac{2+x_n^2}{1+x_n} < 2 \iff 2+x_n^2 < 2+2x_n \iff x_n^2 - 2x_n < 0 \iff x_n \in (0,2)$.

Dunque la successione è crescente ed ha 2 come punto fisso; ne deduciamo che min = inf = 1, max non $\exists$, sup = lim = 2.

2.

$N \sim (1 - \frac{1}{2} 4x^2) - (1 - \frac{1}{2}x^2) = -\frac{3}{2}x^2$ limite $= -\frac{3}{4}$

$D \sim (2x - x)(1 + \frac{1}{2} 2x - 1 + x) = 2x^2$

3.

CE. $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ -x-\sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq -1 \\ \sqrt{x^2-1} < -x \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2-1 < x^2 \end{cases} \iff x \leq -1$

SGN $f(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ -x-\sqrt{x^2-1} \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ \sqrt{x^2-1} \leq -x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2-1 \leq x^2+2x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Dunque $f(x) < 0$ nel suo C.E., eccetto che per $x = -1$ in cui si annulla.

$\lg(-x-\sqrt{x^2-1}) = \alpha \iff \sqrt{x^2-1} = -x-e^\alpha \iff \begin{cases} x \leq -e^\alpha \\ x = -\frac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha} \end{cases}$

Dobbiamo controllare che sia $x \leq -1$:

$-\frac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha} \leq -1 \iff e^{2\alpha} - 2e^\alpha + 1 \geq 0 \iff (e^\alpha - 1)^2 \geq 0$ sempre vera

Infine deve essere $x \leq -e^\alpha$:

$-\frac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha} \leq -e^\alpha \iff e^{2\alpha}+1 \geq 2e^{2\alpha} \iff e^{2\alpha} \leq 1 \iff \alpha \leq 0$

Questo prova che $\operatorname{Im} f = (-\infty, 0]$.
Inoltre f è invertibile e $f^{-1}(\alpha) = -\frac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha}$.
La f.z. f (continua e invertibile su un intervallo) è monotona.
Poiché f è negativa e $f(-1) = 0$, è necessariamente crescente.

4.

$z = 0$ è soluz., $\forall w \in \mathbb{C}$.
Se $z \neq 0$, dalla seconda eq. si deduce $w = -i\bar{z}/z^2$. Sostituendo nella prima eq.)
si ottiene $-\bar{z}^2|z|^2/z^4 = \bar{z}^2$, cioè (in forma esponenziale) $e^{i(\pi-6\theta)} = r^2 e^{-2i\theta}$,
da cui $r = 1$, $-2\theta = \pi - 6\theta + 2k\pi$ cioè $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \dots, 3)$.
Dai valori di z si deducono quelli di w.

5. Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che la disequazione

$$\left| \lg\sqrt{\frac{4-x}{4+x}} - \lg\sqrt{3} \right| < \varepsilon$$

ha un intorno di -2 tra le sue soluzioni (in realtà il punto -2 potrebbe anche essere escluso, ma in questo caso si vede subito che è compreso).

$$\left|\lg\sqrt{\frac{4-x}{3(4+x)}}\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \lg\sqrt{\frac{4-x}{3(4+x)}} < \varepsilon \iff e^{-2\varepsilon} < \frac{4-x}{3(4+x)} < e^{2\varepsilon}$$

nel C.E. della funzione risulta $4+x>0$, dunque

$$3(4+x)e^{-2\varepsilon} < 4-x < 3(4+x)e^{2\varepsilon} \iff \frac{4(1-3e^{2\varepsilon})}{1+3e^{2\varepsilon}} < x < \frac{4(1-3e^{-2\varepsilon})}{1+3e^{2\varepsilon}}.$$

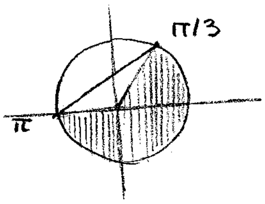
Essendo $\varepsilon>0$, è facile verificare che quello trovato è un intorno di -2.

6.

$$\cos x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x + 1 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} X - \sqrt{3}Y + 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



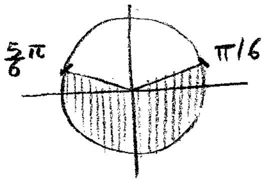
$$2\cos^2 x + 4\,\mathrm{sen}^2 x - 5\,\mathrm{sen}\,x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\,\mathrm{sen}^2 x - 5\,\mathrm{sen}\,x + 2 > 0$$

$$\Updownarrow$$

$\mathrm{sen}\,x > 2$ IMPOSS. $\vee$ $\mathrm{sen}\,x < \frac{1}{2}$



SLZ:

$x \in [0, \pi/6) \cup [\pi/3, 5\pi/6) \cup [\pi, 2\pi]$.

1.
. Essendo $2-x+x^2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\ (\Delta<0)$, la successione è ben definita e positiva.
. $x_{n+1}\geq x_n \iff \sqrt{2-x_n+x_n^2}\geq x_n \iff x_n\leq 2$
. $x_n<2 \Rightarrow x_{n+1}<2$

Infatti $\sqrt{2-x_n+x_n^2}<2 \iff x_n^2-x_n-2<0 \iff -1<x_n<2$

Dunque è crescente ed ha 2 come punto fisso; ne deduciamo che $\min=\inf=0$ $\max$ non $\exists$, $\sup=\lim=2$.

2.
$N\sim \lg(1-3x)\sim -3x$ limite $=-9/2$

$D\sim (1-\frac{1}{2}x^2)^{1/3}-(1-2x)^{1/3}\sim \frac{2}{3}x$

3.
C.E. $\begin{cases}4x^2-1\geq 0\\ \sqrt{4x^2-1}<2x\end{cases} \iff \begin{cases}x\geq\frac12 \vee x\leq -\frac12\\ x\geq 0\\ -1<0\end{cases} \iff x\geq 1/2$

SGN $f(x)\geq 0 \iff \begin{cases}x\geq 1/2\\ \sqrt{4x^2-1}\leq 2x-1\end{cases} \iff \begin{cases}x\geq 1/2\\ 4x^2-1\leq 4x^2-4x+1\end{cases} \iff \begin{cases}x\geq 1/2\\ x\leq\frac12\end{cases} \iff x=\frac12$

Dunque $f(x)<0$ nel suo C.E., eccetto che per $x=\frac12$ in cui si annulla.

$\lg(2x-\sqrt{4x^2-1})=\alpha \iff \sqrt{4x^2-1}=2x-e^{\alpha} \iff \begin{cases}x\geq e^{\alpha}/2\\ x=\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^{\alpha}}\end{cases}$

Dobbiamo controllare che sia $x\geq 1/2$.

$\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^{\alpha}}\geq\dfrac12 \iff 1+e^{2\alpha}\geq 2e^{\alpha} \iff (e^{\alpha}-1)^2\geq 0$ sempre vera

Infine deve essere $x\geq e^{\alpha}/2$:

$\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^{\alpha}}\geq\dfrac{e^{\alpha}}{2} \iff 1+e^{2\alpha}\geq 2e^{2\alpha} \iff e^{2\alpha}\leq 1 \iff \alpha\leq 0$

Questo prova che $\mathrm{Imf}=(-\infty,0]$.
Inoltre f è invertibile e $f^{-1}(\alpha)=\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^{\alpha}}$.
La fz. f (continua e invertibile su un intervallo) è monotona.
Poiché f è negativa e $f(1)=0$, è necessariamente decrescente.

4.
$\omega=0$ è slz. $\forall z\in\mathbb{C}$.
Se $\omega\neq 0$, dalla seconda eq. si deduce $\bar z=-\bar\omega/\omega^2$, ovvero $z=-\omega/\bar\omega^2$.
Sostituendo nella prima eq. si ottiene $\bar\omega^2+\omega^2|\omega|^2/\bar\omega^4=0$ cioè $\bar\omega^6=-\omega^2|\omega|^2$.
In forma esponenziale: $r^6e^{-6i\theta}=r^4e^{(2\theta+\pi)i}$, da cui $r=1$, $-6\theta=2\theta+\pi+2k\pi$,
cioè $\theta=-\pi/8+k\pi/4\ (k=0\dots 7)$

5.
Fissato $\varepsilon>0$, dobbiamo provare che la disequazione

$$\left|\lg\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}-\lg\sqrt3\right|<\varepsilon$$

ha un intorno di 1 tra le sue soluzioni (in realtà il punto 1 potrebbe anche essere escluso, ma in questo caso si vede subito che è compreso).

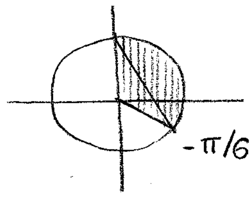
$$\left| \lg \sqrt{\frac{2+x}{3(2-x)}} \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \lg \sqrt{\frac{2+x}{3(2-x)}} < \varepsilon \iff e^{-2\varepsilon} < \frac{2+x}{3(2-x)} < e^{2\varepsilon}$$

nel C.E. della funzione risulta $2-x>0$, dunque

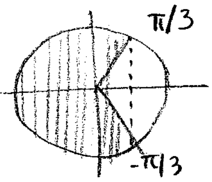
$$3(2-x)e^{-2\varepsilon} < 2+x < 3(2-x)e^{2\varepsilon} \iff \frac{2(3e^{-2\varepsilon}-1)}{1+3e^{-2\varepsilon}} < x < \frac{2(3e^{2\varepsilon}-1)}{1+3e^{2\varepsilon}}.$$

Essendo $\varepsilon>0$, è facile verificare che quello trovato è un intorno di 1.

6.
$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x - 1 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} Y + \sqrt{3}X - 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



$$2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x - 5\cos x > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$\cos x > 2$ IMPOSS. $\vee$ $\cos x < \frac{1}{2}$



SLZ.
$$x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\right].$$

1\. . Perché la successione sia ben definita, deve risultare $x_n \neq -1$.
Per induzione si dimostra che è $x_n > 0$.

. $x_{n+1} \leq x_n \iff \dfrac{2+x_n^2}{1+x_n} \leq x_n \iff 2+x_n^2 \leq x_n + x_n^2 \iff x_n \geq 2$

. Proviamo che $x_n > 2 \Rightarrow x_{n+1} > 2$.

Infatti $\dfrac{2+x_n^2}{1+x_n} > 2 \iff 2+x_n^2 > 2+2x_n \iff x_n^2 - 2x_n > 0 \iff x_n < 0 \vee x_n > 2$.

Dunque la successione è decrescente ed ha 4 come punto fisso; ne deduciamo che $\max = \sup = 4$, min non $\exists$, $\inf = \lim = 2$.

2\.
$N \sim \left(1 - \frac{1}{2} 16x^2\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \sim -\frac{15}{2}x^2$

$D \sim (4x - x)(1 - x - 1 - x) = -6x^2$

limite $= \frac{5}{4}$

3\.
CE $\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ -2x - \sqrt{4x^2-1} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ \sqrt{4x^2-1} < -2x \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1/2 \\ 4x^2 - 1 < 4x^2 \end{cases} \iff x \leq -1/2$

SGN $f(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq -1/2 \\ -2x - \sqrt{4x^2-1} \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1/2 \\ \sqrt{4x^2-1} \leq -2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1/2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

Dunque $f(x) < 0$ nel suo C.E., eccetto che per $x = -1/2$ in cui si annulla.

$\lg(-2x - \sqrt{4x^2-1}) = \alpha \iff \sqrt{4x^2-1} = -2x - e^\alpha \iff \begin{cases} -2x - e^\alpha \geq 0 \\ x = -\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^\alpha} \end{cases}$

Dobbiamo controllare che sia $x \leq -1/2$.

$-\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^\alpha} \leq -\dfrac{1}{2} \iff e^{2\alpha} - 2e^\alpha + 1 \geq 0 \iff (e^\alpha - 1)^2 \geq 0$ sempre vera

Infine deve essere $-2x - e^\alpha \geq 0$, cioè $x \leq -e^\alpha/2$:

$-\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^\alpha} \leq -\dfrac{e^\alpha}{2} \iff e^{2\alpha} + 1 \geq 2e^{2\alpha} \iff e^{2\alpha} \leq 1 \iff \alpha \leq 0$.

Questo prova che $\operatorname{Im} f = (-\infty, 0]$.
Inoltre f è invertibile e $f^{-1}(\alpha) = -\dfrac{1+e^{2\alpha}}{4e^\alpha}$.
La fz. (continua e invertibile in un intervallo) è monotona.
Poiché è negativa per $x < -\frac{1}{2}$ e nulla per $x = -\frac{1}{2}$, è necessariamente crescente.

4\.
$\omega = 0$ è soluz. $\forall z \in \mathbb{C}$.
Se $\omega \neq 0$, dalla seconda eq. si deduce $z = -i\bar{\omega}/\omega^2$. Sostituendo nella prima eq., si ottiene $-\bar{\omega}^2|\omega|^2/\omega^4 - \bar{\omega}^2 = 0$, cioè $\bar{\omega}^2(|\omega|^2 + \omega^4) = 0$ e dunque $\omega^4 = -|\omega|^2$.
In forma esponenziale, $r^4 e^{4i\theta} = r^2 e^{i\pi}$, da cui $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0 \dots 3$
Dai valori di ω si ottengono quelli di z.

5\. Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che la disequazione

$$\left| \lg \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - \lg \sqrt{3} \right| < \varepsilon$$

ha un intorno di -1 tra le sue soluzioni (in realtà il punto -1 potrebbe anche essere escluso, ma in questo caso si vede subito che è compreso)

$$\left| \lg \sqrt{\frac{2-x}{3(2+x)}} \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \lg \sqrt{\frac{2-x}{(2+x)3}} < \varepsilon \iff e^{-2\varepsilon} < \frac{2-x}{3(2+x)} < e^{2\varepsilon}$$

nel CE della funzione risulta $2+x>0$, dunque

$$3(2+x)e^{-2\varepsilon} < 2-x < 3(2+x)e^{2\varepsilon} \iff \frac{2(1-3e^{2\varepsilon})}{1+3e^{2\varepsilon}} < x < \frac{2(1-3e^{-2\varepsilon})}{1+3e^{2\varepsilon}}$$

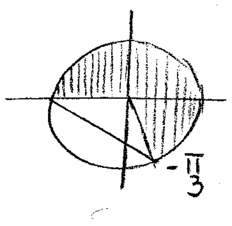
Essendo $\varepsilon > 0$, è facile verificare che quello trovato è un intorno di -1.

6.

$\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x + 1 \geq 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} X + \sqrt{3}Y + 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



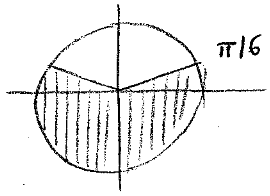
$2\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x > 0$

$\Updownarrow$

$2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 > 0$

$\Updownarrow$

$\operatorname{sen} x > 2$ IMPOSS $\vee$ $\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$



SLZ :

$x \in [0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi) \cup [5\pi/3, 2\pi]$