Soluzioni

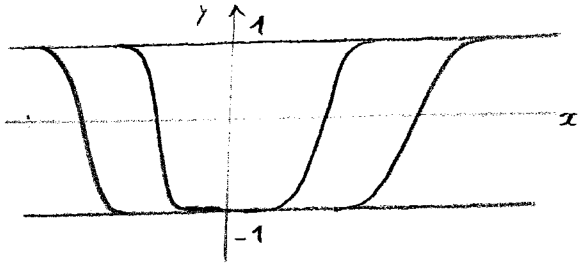
1. C.E. $-1 \le y \le 1$, $x \neq 0$

$\frac{1}{B(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ integrabile in un intorno di ± 1 (che sono le sltz costanti); si perde l'unicità di soluzione per il problema con condizione iniziale.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \arcsin y = \lg|x| + \lg k \quad (k>0)$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{sen} \lg k|x|$$

Deve essere $-\frac{\pi}{2} < \lg(k|x|) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{e^{-\pi/2}}{k} < |x| < \frac{e^{\pi/2}}{k}$, $x \neq 0$

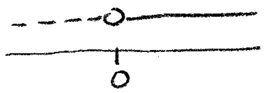


2. C.E. $\begin{cases} \frac{|x|}{\sqrt{2x^2-4x+4}} \le 1 \\ 2x^2-4x+4 > 0 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $x^2 \le 2x^2-4x+4 \le 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 \ge 0$ sempre verificato

$2x^2-4x+4>0$ sempre verificata

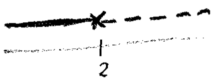
C.E. $= \mathbb{R}$

SGN



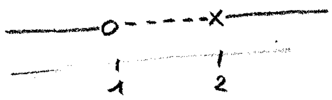
LIMITI per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm \pi/4$

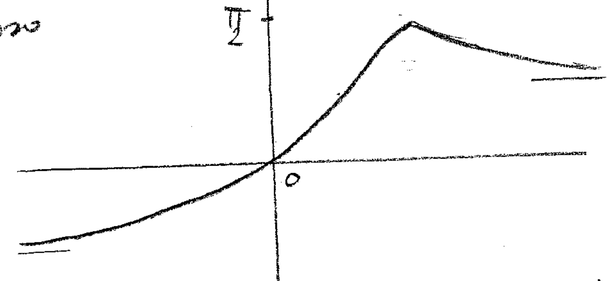
DRV $f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(2-x)}{x^2-2x+2}$



$x=2$ punto angoloso

DRV^2 $f''(x) = \operatorname{sgn}(2-x) \frac{2(1-x)}{(x^2-2x+2)^2}$





3. Poiché $x^2-x+4>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la successione è ben definita e positiva.

$x_{n+1} \ge x_n \Longleftrightarrow x_n \ge 4$

$0 < x_n < 4 \Rightarrow 0 < x_{n+1} < 4$

Infatti:

$$\frac{x_n^3}{x_n^2 - x_n + 4} < 4 \iff x_n^3 - 4x_n + 4x_n - 16 < 0$$
$$\iff x_n^2(x_n - 4) + 4x_n(x_n - 4) < 0$$
$$\iff \underset{\oplus}{x_n}\ \underset{\oplus}{(x_n+4)}\ \underset{\ominus}{(x_n-4)} < 0$$

Dal calcolo precedente si deduce che, essendo $x_1 \in (0,4)$, la successione è decrescente ed ha 0 e 4 come punti fissi.
Da questo ricaviamo che $x_n \to 0$.
Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con il criterio del rapporto:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 4} \to 0 < 1$$

La serie converge

4. $\lg(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$

$\lg^2(1+x) = x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$

$\frac{x^2}{1+x} = x^2(1 - x + x^2 + o(x^2)) = x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$

$f(x) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4)$

$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx \sim \int_0^1 -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha-4} dx$ che converge $\Leftrightarrow$ $\alpha - 4 < 1$, cioè $\alpha < 5$.

5. Per parti: $\left[-\frac{1}{x}\operatorname{arcsen} x\right]_{1/4}^{1} + \int_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Poniamo $\sqrt{1-x^2} = t$, $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dt$;

$$-\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{arcsen}\frac{1}{4} + \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{1-t^2}\,dt =$$

$$\text{"} \quad + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt =$$

$$\text{"} \quad + \frac{1}{2}\left[\lg\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \ldots$$