# Soluzioni

1. C.E. $\mathbb{R}$

SGN $f(x) \geq 0 \iff \sqrt{|x^2-2x|} \geq -x \iff x \geq 0 \ \vee \ \begin{cases} x<0 \\ |x^2-2x| \geq x^2 \end{cases} \iff$

$x \geq 0 \ \vee \ \begin{cases} x<0 \\ x^2-2x \geq x^2 \end{cases} \ \vee \ \begin{cases} x<0 \\ x^2-2x \leq -x^2 \end{cases} \ \ldots$

$$\begin{array}{ccc} + & 0 & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

LIM $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim 2x \to +\infty$, $\quad f(x) - 2x = \sqrt{x^2-2x} - x = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} \sim \dfrac{-2x}{2x} \to -1$

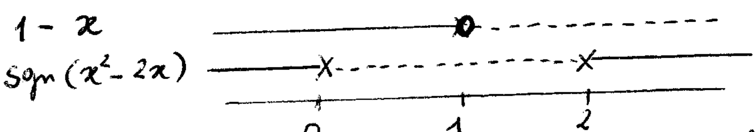
$y = 2x-1$ asintoto

$x \to -\infty$ $\quad f(x) = \sqrt{x^2-2x} + x = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-2x} - x} \sim \dfrac{-2x}{-2x} \to 1$ $\qquad y = 1$ asintoto

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{(x-1)\operatorname{sgn}(x^2-2x)}{\sqrt{|x^2-2x|}} + 1$ $\qquad x \neq 0,\ x \neq 2$ che sono cuspidi

$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{|x^2-2x|} \geq (1-x)\operatorname{sgn}(x^2-2x)$

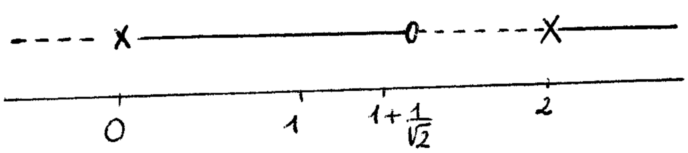
Controlliamo il segno del secondo membro:

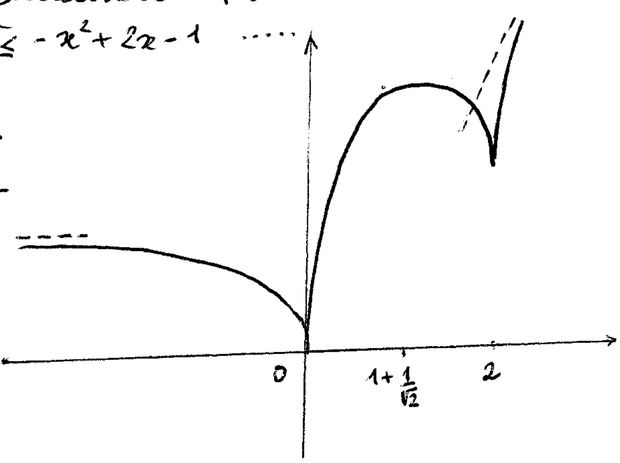



Il secondo membro è negativo (e quindi la disep. è verificata) se $x \in (0,1] \cup (2,+\infty)$

Negli altri intervalli eleviamo al quadrato: $|x^2-2x| \geq x^2-2x+1$

$\iff x^2-2x \geq x^2-2x+1 \ \vee \ x^2-2x \leq -x^2+2x-1 \ \ldots$




DRV$^2$ $\quad f''(x) = -\dfrac{1}{|x^2-2x|^{3/2}} < 0$

2. Il polinomio caratteristico $k^3+1$ si annulla per $k=-1$, $k = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Una base dello s.v. delle soluzioni dell'eq. omogenea è data dalle funzioni $e^{-x}$, $e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $e^{x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Cerchiamo una soluzione particolare complessa $\bar{z}$ dell'eq. $z''' + z = x e^{ix}$ nella forma $\bar{z} = (Ax+B)e^{ix}$.

Sostituendo nell'eq. si trova che deve essere

$A(1-i) = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1+i}{2}$ ; $\quad B = \dfrac{A}{1-i} = \dfrac{i}{2}$.

$\bar{z} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}ix + \frac{1}{2}i\right)(\cos x + i \operatorname{sen} x)$.

Una soluzione particolare reale $\bar{y}$ è $\operatorname{Im} \bar{z} = \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$.

In conclusione:

$$y(x) = \frac{1}{2}(x+1)\cos x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + c_1 e^{-x} + e^{x/2}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

3. Posto $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, l'integrale diventa: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4t^2}{(2+t^2)(1+t^2)^2}\,dt$.

Tenendo conto che la fz. è pari, la scomponiamo nella forma:

$$\frac{A}{2+t^2} + \frac{B}{t^2+1} + \left(\frac{Ct}{t^2+1}\right)' = \frac{A}{2+t^2} + \frac{B}{t^2+1} + \frac{C - Ct^2}{(t^2+1)^2}$$

Deve essere

$$\begin{cases} A + B - C = 0 \\ 2A + 3B - C = 4 \\ A + 2B + 2C = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} A = -8 \\ B = 6 \\ C = -2 \end{matrix}$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{-8}{2+t^2} + \frac{6}{t^2+1} + \left(\frac{-2t}{t^2+1}\right)'\right)dt = \left[-4\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + 6\operatorname{arctg} t - \frac{2t}{t^2+1}\right]_0^{\infty}$$

$$= (3-\sqrt{2})\pi.$$

4. Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{\frac{1}{x}}{x^{2\alpha}} = \dfrac{1}{x^{2\alpha+1}}$ $\quad$ Perché esista l'integrale, deve essere $\alpha > 0$.

Per $x \to 1$ $\quad f(x) \sim \dfrac{k}{|x-1|^{\alpha}}$ $\quad$ Perché esista l'integrale, deve essere $\alpha < 1$.

Per $x \to 0$ $\quad f(x) \sim \lg(1+x) - \lg x$ che è integrabile $\left(|\lg x| \le \frac{1}{x^{\alpha}} \quad \forall \alpha > 0\right)$

In conclusione, l'integrale esiste per $\alpha \in (0,1)$.