Soluzioni

1. $f(x) = \exp \dfrac{\lg \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$

Per $x \to 0$:

$$\frac{\lg\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)}{\operatorname{tg}x} \sim \frac{\lg\frac{1+x}{1-x}}{x} \sim \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{x} = \frac{2x}{(1-x)x} \to 2$$

Poniamo $f(0)=e^2$ come prolungamento continuo.

$$f'(x) = f(x)\,\frac{2\operatorname{sen}x - \lg\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Posto $\operatorname{sen}x = t$, ci riconduciamo a calcolare:

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t-\lg\frac{1+t}{1-t}}{t^2} \underset{H.}{=} \frac{2-\frac{2}{1-t^2}}{2t} = -t \to 0.$$

Dunque, per la funzione prolungata risulta $f'(0)=0$.

2. $x^2-3x+2 = (x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$; $\sqrt{-x^2+3x-2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-3)^2}$.

$$y = 2\int \frac{x+1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx \underset{\substack{2x-3=t\\ 2dx=dt}}{=} \frac{1}{2}\int\frac{t+5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-t^2}+5\arcsen t\right)+c$$

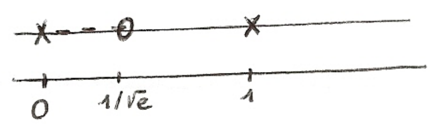
$$= \sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{5}{2}\arcsen(2x-3)+c.$$

3. $\lg x^2 = 2\lg|x|$, $\lg^2 x^2 = 4\lg^2|x|$

$$f(x) = \frac{1}{2\lg^2|x|}+\frac{1}{\lg|x|}.$$

La funzione è pari; possiamo dunque limitarci a studiare la funzione

$$f(x)=\frac{1}{2\lg^2 x}+\frac{1}{\lg x} = \frac{1+2\lg x}{2\lg^2 x}.$$



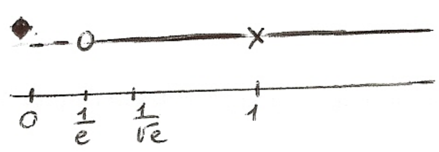
C.E. $x>0$, $x\neq 1$

SGN $f(x)\geq 0$ per $\lg x\geq -\frac{1}{2}$, cioè per $x\geq\frac{1}{\sqrt e}$

LIM per $x\to+\infty$ $f(x)\to 0$ (as. orizzontale)

per $x\to 0$ $f(x)\to 0$ (disc. eliminabile)

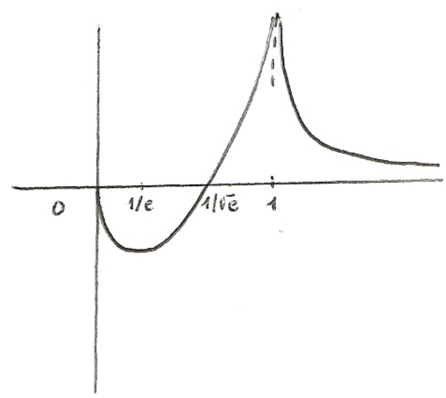
per $x\to 1$ $f(x)\to+\infty$ (as. verticale)



DRV $f'(x) = -\dfrac{1+\lg x}{x\lg^3 x}$

per $x\to 0$, $f'(x)\sim \dfrac{-\lg x}{x\lg^3 x} = -\dfrac{1}{x\lg^2 x}\to-\infty$

Il punto $x=0$ è a tangente verticale; diventa un punto di cuspide per la funzione definita per simmetria anche per $x<0$).



DRV² $f''(x) = \dfrac{\lg^2 x+3\lg x+3}{x\lg^4 x}$

che è positiva nel C.E.

4. Il polinomio caratteristico $k^2 - 2k + 2$ ha le radici $1 \pm i$; una base dello spazio delle soluzioni dell' eq. omogenea è dunque $e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$.
Passiamo in campo complesso, sostituendo il termine noto con $3xe^{(1+2i)x}$.
Cerchiamo una soluzione (complessa) della forma $(Ax+B)e^{(1+2i)x}$ per l'equazione completa.

$$z = (Ax+B)e^{(1+2i)x} \qquad z' = e^{(1+2i)x}\left(A + (Ax+B)(1+2i)\right)$$

$$z'' = e^{(1+2i)x}\left(2(1+2i)A + (Ax+B)(-3+4i)\right)$$

Sostituendo nell'equazione, si arriva al sistema:

$$\begin{cases} 4iA - 3B = 0 \\ -3A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = -\frac{4}{3}i \end{array}$$

$$\bar{z} = \left(-x - \frac{4}{3}i\right)e^x(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y} = \operatorname{Re} \bar{z} = e^x\left(\frac{4}{3}\operatorname{sen} 2x - x\cos 2x\right).$$

In conclusione,

$$y = e^x\left(\frac{4}{3}\operatorname{sen} 2x - x\cos 2x\right) + c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x.$$