Soluzioni

1.

- Imponendo che e^{kx} risolva l'eq. omogenea, si trova $(k-1)^2 x - (k-1) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Questo accade solo se $k=1$.
- Cerchiamo una seconda soluzione nella forma $c(x)e^x$; sostituendo, si trova che deve essere $x c'' - c' = 0$. Posto $c' = z$, dobbiamo studiare l'eq. $x z' - z = 0$, che è sia lineare omogenea che a variabili separate. Deve essere $z = ax$ e dunque $c = \frac{1}{2} a x^2 + b$, con a, b costanti. Scegliendo $a = 2$, $b = 0$, si trova $c = x^2$ e dunque $y_{02}(x) = x^2 e^x$.
- Una soluzione particolare dell'equazione completa si trova con la variazione delle costanti arbitrarie: $\bar{y}(x) = c_1(x)\, e^x + c_2(x)\, x^2 e^x$.

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & x^2 e^x \\ x e^x & 2x e^x + x^2 e^x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} e^x & x^2 e^x \\ e^x & 2x e^x + x^2 e^x \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2} x^2 \longrightarrow c_1 = -\frac{1}{6} x^3$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x e^x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} e^x & x^2 e^x \\ e^x & 2x e^x + x^2 e^x \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \longrightarrow c_2 = \frac{x}{2}$$

In conclusione:

$$\bar{y} = -\frac{1}{6} x^3 e^x + \frac{1}{2} x^3 e^x = \frac{1}{3} x^3 e^x.$$

L'integrale generale dell'eq. è dunque:

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3 e^x + c_1 e^x + c_2 x^2 e^x = \left(c_1 + c_2 x^2 + \frac{1}{3} x^3\right) e^x.$$

2.

CE. $x^2 - |x-1| \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

SGN positiva; si annulla per $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

LIM per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{x^2 - x + 1} \sim x \to +\infty$; $\quad \sqrt{x^2-x+1} - x = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1} + x} \to -\frac{1}{2}$

$y = x - \frac{1}{2}$ asintoto

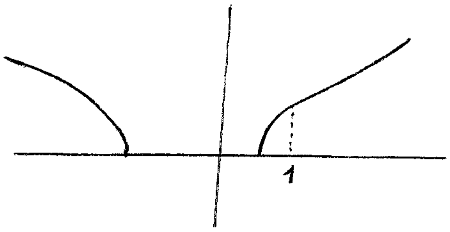
per $x \to -\infty$ $\quad \sqrt{x^2 + x - 1} \sim -x \to +\infty$; $\quad \sqrt{x^2+x-1} + x = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1} - x} \to -\frac{1}{2}$

$y = -x - \frac{1}{2}$ asintoto

DRV $\quad f'(x) = \frac{2x - \operatorname{sgn}(x-1)}{2\sqrt{x^2 - |x-1|}}$ $\quad$ $-$ su $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $+$ su $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ $\quad$ $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ pti. a tg. vertic.

DRV^2 $\quad f''(x) = \frac{4(x^2 - |x-1|) - (2x - \operatorname{sgn}(x-1))^2}{4(x^2 - |x-1|)^{3/2}}$ $\quad$ $-$ $\quad$ $-$ $\quad$ 1 $\quad$ $+$

$x = 1$ flesso



Grafico

3. Se $x > \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{1}{n^{2x-1}} \sim \frac{1}{n^{2x-1}}$.

Confrontiamo i due infinitesimi; poichè $x > 2x-1$ se $x<1$, si ha:

$\frac{1}{2} < x < 1$ possiamo trascurare $\frac{1}{n^x}$;

$a_n \sim -\left(\frac{1}{n}\right)^{2x-2}$

Essendo $2x-2<1$, la serie diverge

$x > 1$ possiamo trascurare $\operatorname{sen}\frac{1}{n^{2x-1}}$

$a_n \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{x-1}$

La serie converge per $x > 2$.

$x = 1$ $a_n = n\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{6n^2}$

La serie converge.

4.

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$\sqrt[3]{1+x^2-\frac{1}{3}x^4} = 1 + \frac{1}{3}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) - \frac{1}{9}(x^4) + o(x^4) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^4 + o(x^4)$

$N. = 3 + x^2 - \frac{2}{3}x^4 - 5 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{7}{12}x^4$

$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

$D. \sim -x^4/8$

limite $= -7/12 \,/\, -1/8 = \frac{14}{3}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx \underset{\substack{\operatorname{sen}x = t\\ \cos x\,dx = dt}}{=} \int_0^{1/2} \frac{dt}{(t^2-1)^2} \underset{\text{HERMITE}}{=} \cdots\cdots = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + \left(\frac{-t/2}{t^2-1}\right)'\right) dt =$

$= \left[\frac{1}{4}\lg\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1}\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{4}\lg 3 + \frac{1}{3}$.

[2]

1. e 4. come per l'altro compito.

2.

C.E. $x^2 - |x+1| \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

SGN positiva; nulla per $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

LIM per $x \to +\infty$ $\sqrt{x^2-x-1} \sim x \to +\infty$, $\sqrt{x^2-x-1} - x = \frac{-x-1}{\sqrt{x^2-x-1}+x} \to -\frac{1}{2}$

$y = x - \frac{1}{2}$ asintoto

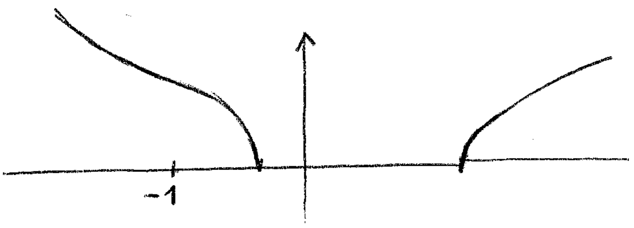
per $x \to -\infty$ $\sqrt{x^2+x+1} \sim -x \to +\infty$, $\sqrt{x^2+x+1} + x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \to -\frac{1}{2}$

$y = -x - \frac{1}{2}$ asintoto

DRV $f'(x) = \frac{2x - \operatorname{sgn}(x+1)}{2\sqrt{x^2 - |x+1|}}$ $\quad - \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad +$ $\quad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ pti a tg verticale

DRV^2 $f''(x) = \frac{4(x^2 - |x+1|) - (2x - \operatorname{sgn}(x+1))^2}{4(x^2 - |x+1|)^{3/2}}$ $\quad + \quad -1 \quad - \quad -$

$x = -1$ flesso



3.

Se $x > \frac{1}{4}$ $\quad \operatorname{sen} \frac{1}{n^{4x-1}} \sim \frac{1}{n^{4x-1}}$.

Confrontiamo i due infinitesimi; poiché $x > 4x-1$ se $x < \frac{1}{3}$, si ha:

$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ possiamo trascurare $\frac{1}{n^x}$;

$a_n \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{4x-2}$

Poiché $4x-2 < 1$, la serie diverge

$x > \frac{1}{3}$ possiamo trascurare $\operatorname{sen} \frac{1}{n^{4x-1}}$;

$a_n \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{x-1}$

La serie converge per $x > 2$.

$x = \frac{1}{3}$ $\qquad a_n = n\left(\frac{1}{n^{1/3}} - \operatorname{sen}\frac{1}{n^{1/3}}\right) \sim \frac{n}{6n} \to \frac{1}{6}$

La serie diverge.

5. $$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos^2 x)^2}\, dx \underset{\substack{\cos x = t \\ -\operatorname{sen} x\, dx = dt}}{=} \int_0^{1/2} \frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

a questo punto si procede come nell'altro compito.