Istituzioni di Matematiche
Prova scritta del 4.2.10

1. CE $x \neq \frac{\pi}{2}$

SGN sempre positiva; nulla per $x = \frac{3}{2}\pi$

LIM per $x \to \frac{\pi}{2}$ $f(x) \overset{H.}{=} \frac{\operatorname{sen} x}{2|\cos x|^{3/2}} \to +\infty$ asintoto verticale

$f(0) = f(2\pi) = 1$

DRV $f'(x) = \frac{(-\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 2)\operatorname{sgn}\cos x}{2(1-\operatorname{sen} x)^2 |\cos x|^{1/2}} = \frac{(\operatorname{sen} x + 2)\operatorname{sgn}\cos x}{2(1-\operatorname{sen} x)|\cos x|^{1/2}}$

per $x \to \frac{3}{2}\pi$ $f'(x) \sim \frac{\operatorname{sgn}\cos x}{2|\cos x|}$ cuspide

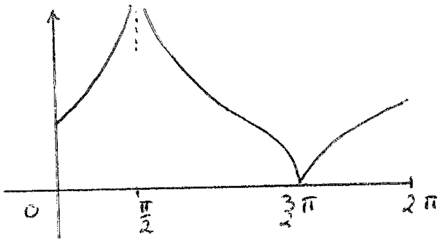
$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \searrow \frac{3}{2}\pi \nearrow 2\pi$

AREA TRAPEZOIDE

Posto $t = x - \frac{\pi}{2}$, $f(t) = \frac{|\operatorname{sen} t|^{1/2}}{1-\cos t} \sim \frac{2|t|^{1/2}}{t^2} = \frac{2}{|t|^{3/2}}$.

Poichè la fz. è un infinito di ordine >1, l'area non esiste finita.

GRAFICO



2. $x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-(2x-1)^2}{4}$

Posto $2x - 1 = \operatorname{sen} t$ (con $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), $x = \frac{1+\operatorname{sen} t}{2}$, $dx = \frac{1}{2}\cos t\, dt$:

$\int \frac{(1+\operatorname{sen} t)^2}{4} dt = \frac{3}{8}t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} t \cos t - \frac{1}{2}\cos t + c = \frac{3}{8}\operatorname{arcsen}(2x-1) - \frac{2x+3}{2}\sqrt{x-x^2} + c.$

3. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow |x^2-1|$.

Se $|x^2-1| < 1$, cioè $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, $x \neq 0$ la serie converge

Se $|x^2-1| > 1$, cioè $x > \sqrt{2}$ opp. $x < -\sqrt{2}$ la serie non converge.

Se $x = \pm\sqrt{2}$: $a_n = \frac{\lg n}{n^2} < \frac{n^\alpha}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}$. Scegliamo $\alpha < 1$ per poter concludere che la serie converge per confronto

Se $x = 0$: $a_n = (-1)^n \frac{\lg n}{n^2}$. La serie converge per il teorema di Leibniz. Per provare la decrescenza di $|a_n|$, si studia il segno della derivata della funzione $\lg x / x^2$.

4. Dalla seconda eq. si ottiene $y = -z'$, e dunque $y'' = -z'''$. Sostituendo nella prima eq.: $-z''' + z = \operatorname{sen} x$. Il polinomio caratteristico $-k^3+1$ ha come radici 1, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; una base dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'eq. omogenea è $e^x, e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Cerchiamo una slz. complessa dell'eq. $-z''' + z = e^{ix}$ nella forma $z = Ae^{ix}$. Sostituendo, si trova che deve essere $A = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. Una soluz. reale è dunque $\operatorname{Im}\left(\frac{1-i}{2}e^{ix}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$.

In conclusione, $z(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + c_1 e^x + c_2 e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

La soluzione $y(x)$ si ottiene dalla relazione $y = -z'$.

5. per $x \to 0^+$ $\frac{\operatorname{sen} x}{\lg(1+x)} \sim \frac{x}{x} \to 1$; per $x \to 0^-$ $e^{\frac{\lg\cos x}{x}} \sim e^{\frac{\lg(1-\frac{x^2}{2})}{x}} \sim e^{-\frac{x}{2}} \to 1$.

La funzione si prolunga per continuità ponendo $f(0) = 1$.

Per il rapporto incrementale si ha:

$\left[\frac{\operatorname{sen} x}{\lg(1+x)} - 1\right]/x = \frac{\operatorname{sen} x - \lg(1+x)}{x\lg(1+x)} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \to \frac{1}{2}$

$\left[e^{\frac{\lg\cos x}{x}} - 1\right]/x \sim \frac{\lg\cos x}{x^2} \simeq \frac{\lg(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \to -\frac{1}{2}$

$f'(0)$ non esiste
punto angoloso.