Analisi Matematica – Prova scritta del 19.01.2010

Soluzioni

1.

La funzione è

- 2π-periodica $\rightarrow$ basta studiarla in $[-\pi, \pi]$
- dispari $\rightarrow$ basta studiarla in $[0, \pi]$
- simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ basta studiarla in $[0, \pi/2]$.

Studiamo dunque la funzione
$$f(x) = \operatorname{sen} x \lg \operatorname{tg} x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

C.E. $(0, \pi/2)$

LIMITI per $x \to 0$ $\quad f(x) \sim x \lg x \quad$ DISC. ELIM.
per $x \to \frac{\pi}{2}$ $\quad f(x) \to +\infty \quad$ AS. VERTIC.

SGN $\quad - - - 0 + + +$ su $(0, \frac{\pi}{2})$, con 0 in $\frac{\pi}{4}$

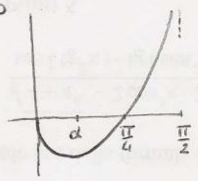
DRV $\quad f'(x) = \cos x \lg \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$

per $x \to 0$ $\quad f'(x) \to -\infty \quad$ PUNTO A TG. VERTIC.

Per studiare il segno di f', basta studiare quello della funzione $\varphi(x) = \lg \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = \lg \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1$.
Nell'intervallo considerato, la funzione è crescente; inoltre per $x \to 0$ $\varphi(x) \to -\infty$, per $x \to \frac{\pi}{2}$ $\varphi(x) \to +\infty$. Dunque $\exists_1 \alpha : \varphi(\alpha) = 0$.
Essendo $\varphi(\pi/4) > 0$, $\alpha \in (0, \pi/4)$.

Segno f' $\quad - - 0 + + + + +$, con 0 in α

GRAFICO



2. Integrando per parti:
$$\int \operatorname{sen} x \lg|\operatorname{tg} x|\, dx = -\cos x \lg|\operatorname{tg} x| + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \lg \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + c$$
$\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x\, dx = dt$

L'integrale proposto vale:
$$y = -\cos x \lg|\operatorname{tg} x| + \lg \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + c = \varphi(x) + c$$

$$\varphi(\pi/4) = \lg \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = -\lg(\sqrt{2}+1)$$

per $x \to \frac{\pi}{2}$ $\quad \lg \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \to 0$, $\quad -\cos x \lg \operatorname{sen} x \to 0$, $\quad \cos x \lg \cos x \to 0$.

L'integrale esiste e vale $\lg(\sqrt{2}+1)$.

Per provare l'esistenza dell'integrale con un criterio a priori, dobbiamo controllare l'ordine di infinito della funzione per $x \to \frac{\pi}{2}$:
$f(x) \sim -\lg \cos x$. Posto $\frac{\pi}{2} - x = t \to 0^+$, $-\lg \cos x = -\lg \operatorname{sen} t \sim -\lg t = -\lg(\frac{\pi}{2} - x)$. Poiché $|\lg(\frac{\pi}{2} - x)| \leq 1/(\frac{\pi}{2} - x)^\alpha$, scegliendo per α un valore minore di 1, si deduce l'integrabilità.

3. Perchè valga il teorema di Lagrange, la funzione deve essere continua in $[-4,2]$ e derivabile in $(-4,2)$.
La funzione non è derivabile in $x=-2$ (oltre che in $x=2$).
Dobbiamo verificare se esiste in $(-4,2)$ una soluzione dell'equazione:
$$1-\frac{x\,\text{sgn}(4-x^2)}{\sqrt{|4-x^2|}}=1-\frac{\sqrt{12}}{6}.$$
Distinguiamo due casi:

(a) $\begin{cases} x\in(-2,2) \\ \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{12}}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(0,2) \\ 36x^2=48-12x^2 \end{cases} \iff x=1$

(b) $\begin{cases} x\in(-4,-2) \\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{\sqrt{12}}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-4,-2) \\ 36x^2=12x^2-48 \end{cases}$ nessuna soluzione

4. Polinomio caratteristico k^3+1, nullo per $k=-1$, $k=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Lo spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea ha per base
$$e^{-x},\quad e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\quad e^{x/2}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$
Dell'eq. complessa $z'''+z=e^{i2x}$ cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{z}(x)=Ae^{2ix}$. Sostituendo nell'eq., si trova che deve essere $-8Ai+A=1 \iff A=\frac{1}{1-8i}=\frac{1+8i}{65}$.
Una soluzione particolare dell'eq. reale è $\bar{y}=\Im m\,\frac{1+8i}{65}(\cos 2x+i\,\text{sen}\,2x)$
$=\frac{1}{65}\,\text{sen}\,2x+\frac{8}{65}\cos 2x.$
In conclusione, le soluzioni dell'eq. proposta sono le funzioni:
$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3e^{x/2}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x+$$
$$+\frac{1}{65}\,\text{sen}\,2x+\frac{8}{65}\cos 2x.$$