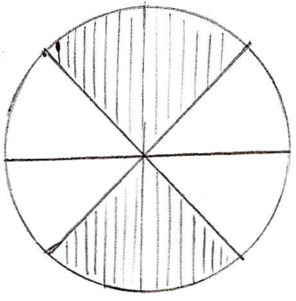
Prova parziale n 1. del 29.10.09

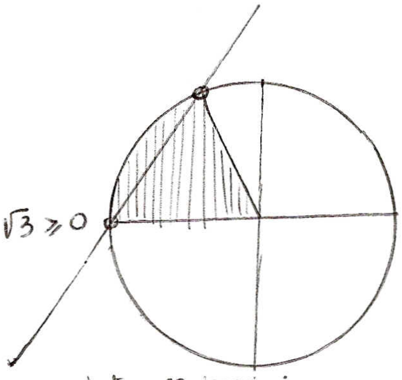
Soluzioni

[1]

1.a $\quad |\operatorname{sen} x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

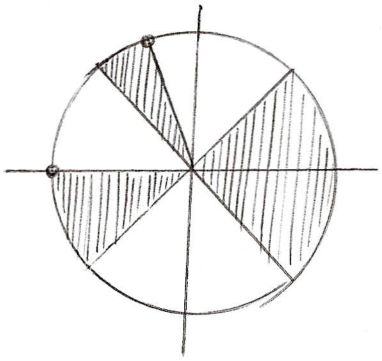


$\cos x = X$
$\operatorname{sen} y = Y$
$Y - \sqrt{3}X - \sqrt{3} \geq 0$



intersezioni: $(-1, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soluzioni:



Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ le soluzioni sono:

$[0, \pi/4] \cup \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right] \cup \left(\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \cup \left[\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$

1.b $\quad$ C.E. $\begin{cases} x^2-4 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \iff x > 2$

DISEQ: $\begin{cases} x > 2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+1} \geq \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases}$

nessuna slz.

---

2. La succesione è ben definita e positiva. $\quad$ ($L = \frac{1}{2}$ punto fisso)

$x_{n+1} \geq x_n \iff 0 < x_n \leq \frac{1}{2}$

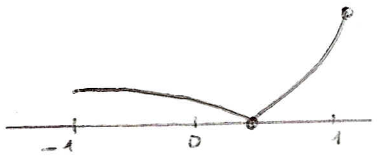
$x_n > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{n+1} > \frac{1}{2}$

Poichè $x_1 > \frac{1}{2}$, la succesione è decrescente e limitata inferiormente. Dunque ammette limite; poichè questo limite è finito, deve coincidere con il punto fisso $\frac{1}{2}$.

In conclusione: $\max = \sup = 2$, $\min$ non $\exists$, $\inf = \lim = \frac{1}{2}$

---

3 $\quad x \in [-1, \cos 1) \cup (\cos 1, 1)$



4. $\cos 2\alpha = -1/9 \qquad \cos\alpha = 2/3$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 4\sqrt{5}/9 \qquad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{5}/3$

$\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) = \frac{4}{9}\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{27}$

$\frac{AC}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha)}$

Inoltre $\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha) = \operatorname{sen} 3\alpha$.

---

5. $\cos n\pi = (-1)^n$

Per n pari: $x_n = \frac{1}{3^{n+1}}$

Per n dispari: $x_n = -\frac{1}{3^{n-1}}$

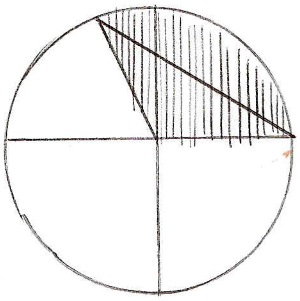
$\sup = \max = 1/27$

$\inf = \min = -1$

0 punto di accumulazione (unico). In ogni suo intorno cadono definitivamente i punti di entrambe le sottosuccessioni.

[2]

1.a $\cos x = X$
$\sin x = Y$
$X + \sqrt{3}Y - 1 \geq 0$



$|\sin x| > -\frac{1}{2}$ sempre verificata

intersezioni
$(1,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Soluzioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$:
$x \in [\frac{2}{3}\pi, 2\pi]$.

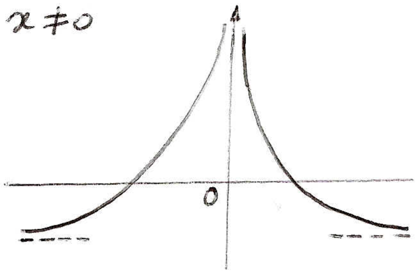
1b $\begin{cases} x - \sqrt{|x-1|} > 0 \\ x - \sqrt{|x-1|} > 1 \end{cases} \iff \sqrt{|x-1|} < x-1 \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2 > (x-1) \end{cases} \iff x > 2$

---

2. La successione è ben definita e positiva.
$x_{n+1} \geq x_n \iff 0 \leq x_n \leq \frac{\sqrt{17}-1}{8}$ $\quad (L = \frac{\sqrt{17}-1}{8}$ punto fisso$)$
$x_n > \frac{\sqrt{17}-1}{8} \Rightarrow x_{n+1} > \frac{\sqrt{17}-1}{8}$.
Poichè $x_1 > \frac{\sqrt{17}-1}{8}$, la successione è decrescente e limitata inferiorm.
Dunque ammette limite; poichè questo limite è finito, deve coincidere con il punto fisso trovato.
In conclusione: $\max = \sup = \frac{1}{2}$, $\min$ non $\exists$, $\inf = \lim = \frac{\sqrt{17}-1}{8}$.

---

3. $x \neq 0$



4. $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4}{9}\sqrt{5}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{2}{3}$
$\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$ $\qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{AC}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha)}$

Inoltre $\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha) = \operatorname{sen} 3\alpha$ e
$\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) = \frac{7}{27}\sqrt{5}$ ...

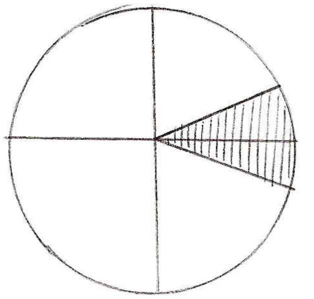
---

5. Per n pari: $x_n = -\frac{1}{4^{n-1}}$ $\qquad$ per n dispari: $x_n = \frac{1}{4^{n+1}}$

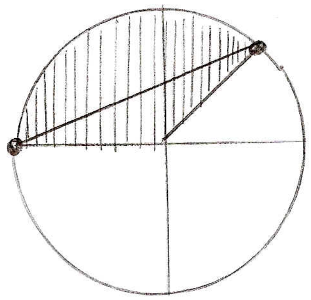
$\sup = \max = 1/16$
$\inf = \min = -1/4$

0 punto di accumulazione (unico)
In ogni suo intorno cadono definitiv. i punti di entrambe le sottosuccessioni.

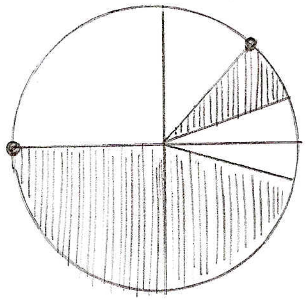
1.a $|\cos x| > \sqrt{3}/2$



$\cos x = X$
$\operatorname{sen} x = Y$
$\sqrt{3}Y - X - 1 > 0$
intersezioni:
$(-1,0)$, $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$



Soluzioni:



Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ le soluzioni sono:
$(\frac{\pi}{6}, \operatorname{arcsen}\frac{3}{5}) \cup (\pi, \frac{11}{6}\pi)$

1.b C.E. $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x+4>0 \end{cases} \iff x \in (-4,-1) \cup (1,+\infty)$

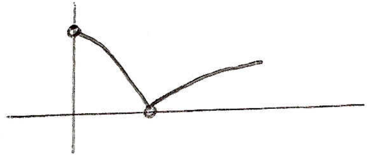
DISEQ. $\begin{cases} x \in (-4,-1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+4} \geq \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-4,-1) \cup (1,+\infty) \\ x \leq -\frac{17}{8} \end{cases} \iff -4 < x \leq -\frac{17}{8}$

---

2. La successione è ben definita e positiva.
$x_{n+1} \geq x_n \iff x_n \leq 1$ ($L=1$ punto fisso)
$x_n > 1 \Rightarrow x_{n+1} > 1$
Poiché $x_1 > 1$, la successione è decrescente e limitata inferiormente.
Dunque ammette limite; poiché questo limite è finito, deve coincidere con il punto fisso 1.
In conclusione: max = sup = 2, min non $\nexists$, inf = lim = 1.

---

3. $x \in (0, \operatorname{sen}1) \cup (\operatorname{sen}1, 1]$



4. $\cos 2\alpha = -1/3$ $\quad \cos\alpha = 1/\sqrt{3}$
$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\sqrt{2}/3$ $\quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2/3}$
$\dfrac{AC}{\operatorname{sen}2\alpha} = \dfrac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha)}$
Inoltre $\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha) = \operatorname{sen}3\alpha$ e
$\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \dots = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

---

5. $\cos n\pi = (-1)^n$
$x_n = \dfrac{5 + (1-(-1)^n)3^n}{4^n}$

n pari: $x_n = \dfrac{5}{4^n}$

max = sup = $\frac{11}{4}$
min non $\exists$
inf = 0

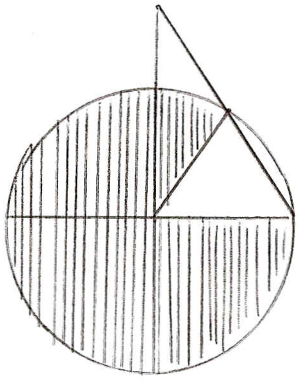
n dispari: $x_n = \dfrac{5}{4^n} + \dfrac{2\cdot 3^n}{4^n}$

0 è punto di accumulazione (unico).
In ogni suo intorno cadono definitiv. i punti di entrambe le sottosuccessioni

[4]

1.a

$\cos x = X$
$\operatorname{sen} x = Y$
$\sqrt{3} - Y - \sqrt{3}X \geq 0$



pti intersezione:
$(1,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• $\sqrt{2}|\cos x| + 1 > 0$ sempre verificata

Soluzioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$:
$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

1.b $\begin{cases} x + \sqrt{|x-1|} > 0 \\ x + \sqrt{|x-1|} > 1 \end{cases}$ $\iff \sqrt{|x-1|} > 1-x \iff 1-x<0 \ \vee \ \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x>0 \end{cases}$

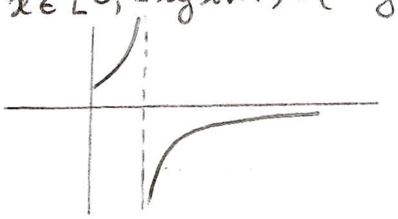
$\iff x > 0$

---

2. La successione è ben definita e positiva.
$x_{n+1} > x_n \iff 3x_n^3 - x_n - 2 < 0 \iff 3(x_n - 1)(3x_n^2 + 3x_n + 2) < 0 \iff x_n < 1$
($L=1$ punto fisso).
$x_n > 1 \not\Rightarrow x_{n+1} > 1$
$x_n < 1 \not\Rightarrow x_{n+1} < 1$
La successione oscilla attorno alla sua posizione limite, che è il punto fisso.
In conclusione: $\max = \sup = 2$, $\min = \inf = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\lim = 1$.

---

3. $x \in [0, -\lg \operatorname{sen} 1) \cup (-\lg \operatorname{sen} 1, +\infty)$



4. $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ $\qquad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha)}$$

Inoltre $\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha) = \operatorname{sen} 3\alpha$ e
$\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) = \dots = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

5.

Per n pari: $x_n = \frac{9}{3^n}$

$\sup = \max = 1$
$\inf = 0$
$\min = \text{non } \exists$

Per n dispari: $x_n = \frac{9 + 2 \cdot 2^n}{3^n}$

0 punto di accumulazione (unico)
In ogni suo intorno cadono definitiv. i punti di entrambe le sottosuccess.