Istituzioni di Matematiche I
Prova scritta del 10. 9. 09

$$f(x) = \lg\left(\sqrt{|x-1|} + x\right)$$

C.E.

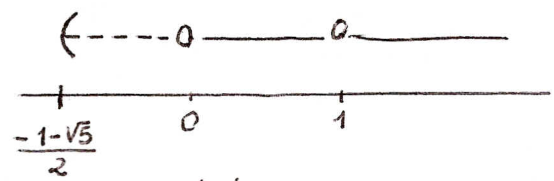
$\sqrt{|x-1|} > -x$

$x > 0 \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ |x-1| > x^2 \end{cases} \iff x > 0 \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$

$x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$

SGN.

$f(x) \geq 0 \iff \sqrt{|x-1|} \geq 1 - x$



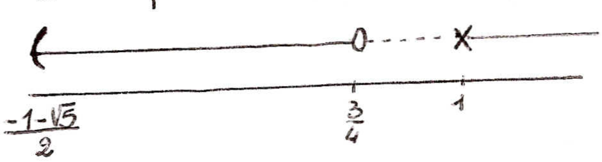
LIMITI

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \lg x \to +\infty$ $\quad$ senza asintoto
per $x \to \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad f(x) \to -\infty$ $\quad$ asintoto verticale

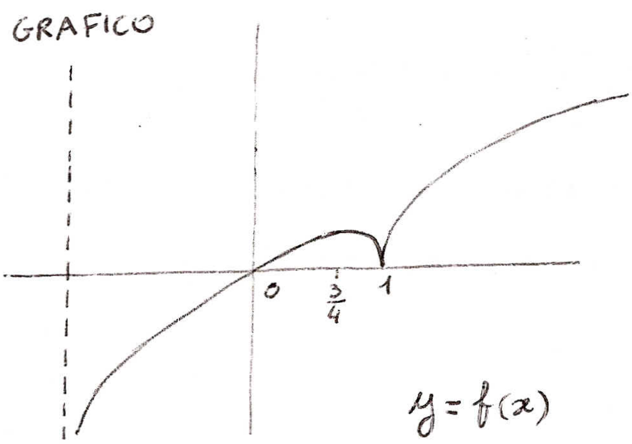
DRV

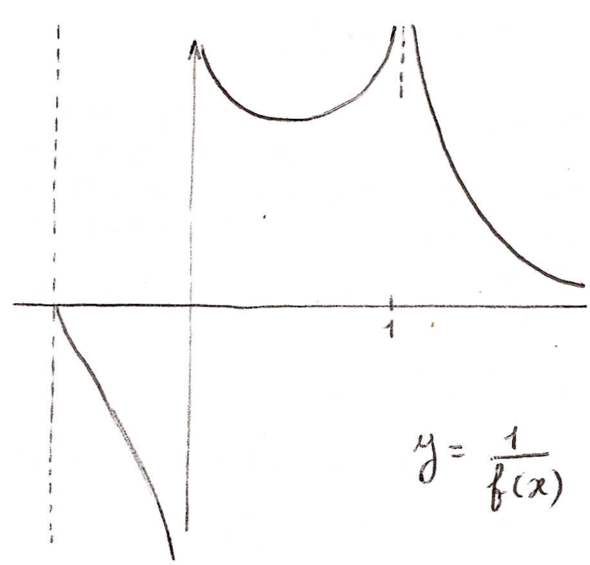
$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{|x-1|}} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{2\sqrt{|x-1|}}\right), \quad x \neq 1$$

$x = 1$ punto di cuspide



GRAFICO





2.

$$\int_0^1 \lg\left(x+\sqrt{1-x}\right)dx$$

Integrando per parti:

$$\left[x\lg\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+\sqrt{1-x}}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)dx$$

Il primo termine è nullo.
Per calcolare l'integrale, poniamo

$$\sqrt{1-x}=t \;\rightarrow\; x=1-t^2,\; dx=-2t\,dt \;:$$

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-t^2+t}\left(1-\frac{1}{2t}\right)(-2t)\,dt = \int_0^1 \frac{(1-t^2)(2t-1)}{t^2-t-1}\,dt =$$

$$= \int_0^1\left(-2t-1-\frac{t+2}{t^2-t-1}\right)dt$$

$$= \int_0^1\left(-2t-1-\frac{\sqrt5+1}{2}\,\frac{1}{t-\frac{\sqrt5+1}{2}}+\frac{\sqrt5-1}{2}\,\frac{1}{t-\frac{1-\sqrt5}{2}}\right)dt =$$

.....

3. Il polinomio caratteristico k^3+8 ha come radici $-2,\ 1\pm i\sqrt3$.
Le soluzioni dell'eq. omogenea sono della forma

$$c_1e^{-2x}+c_2e^{x}\cos\sqrt3x+c_3e^{x}\operatorname{sen}\sqrt3x.$$

Per trovare una soluzione particolare, passiamo in campo complesso $z'''+8z=xe^{2ix}$ e cerchiamo una soluzione della forma $(Ax+B)e^{2ix}$.
Sostituendo, si trova che deve essere

$$\begin{cases}8(1-i)A=1\\-3A+2(1-i)B=0\end{cases} \Rightarrow \quad A=\frac{1+i}{16},\quad B=\frac{3}{32}i.$$

Prendendo la parte immaginaria della soluzione complessa, si ricava $\bar y(x)=\frac{1}{32}(2x+3)\cos2x+\frac{1}{16}x\operatorname{sen}2x$.

4.

$$\sqrt[4]{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = 1+\frac14\left(-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)-\frac{3}{32}\left(\frac{4}{n^4}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$2\cos\frac1n = 2-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$x_n \sim -\frac{5}{24}\left(\frac1n\right)^{4-\alpha}$$

La serie converge se $4-\alpha>1$, cioè $\alpha<3$.