Compito parziale n.3 del 16.01.09

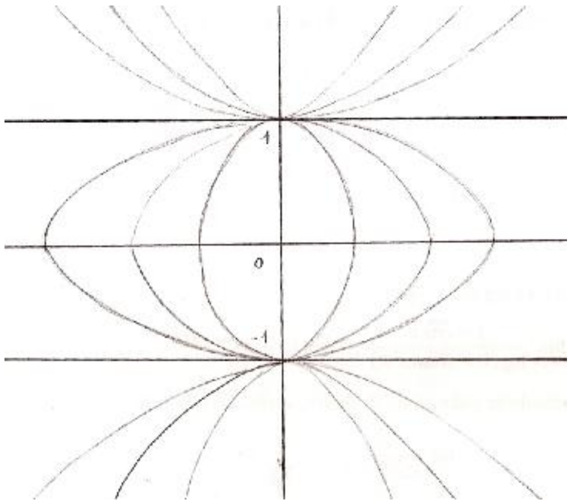
Soluzioni

1.
Le funzioni $y = \pm 1$ sono soluzioni costanti.
Per trovare le altre soluzioni, procediamo come di consueto.

$$\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y} \frac{2s}{s^2-1}\,ds = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,ds \quad \Rightarrow \quad \log\sqrt{|y^2-1|} = \log|x| + \log|k| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{|y^2-1|} = |kx|$$

$$\Rightarrow \quad |y^2-1| = c\,x^2 \quad \text{con } c > 0.$$

Se $|y| > 1$, si ottiene $y = \pm\sqrt{1+c\,x^2}$, $x \in R$
se $|y| < 1$, si ottiene $y = \pm\sqrt{1-c\,x^2}$, $|x| < 1/\sqrt{c}$.



2.
La funzione $f(t) = \sqrt{t^2+1}\ /\ t^2$:
non è integrabile in un intorno di 0 (diverge di ordine 2)
non è integrabile in un intorno di $\pm\infty$ (non è infinitesima).

Studio della funzione $F(x)$.

- La funzione è dispari:
  $$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\,dt \underset{t=-s}{=} \int_{x}^{2x} -f(-s)\,ds = -\int_{x}^{2x} f(s)\,ds = -F(x)$$
  Possiamo dunque limitarci a studiarla per $x \geq 0$. I risultati che seguono si riferiscono a questa limitazione.

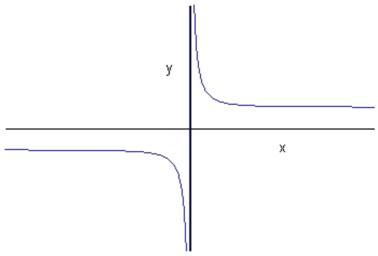
- C.E. $\qquad x > 0$

- Limiti $\qquad$ per $x \to 0 \qquad F(x) \approx \int_{x}^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} \to +\infty$

$$\text{per } x \to +\infty \quad F(x) \approx \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \to \log 2$$

- Derivata $\quad F'(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1} - 2\sqrt{x^2+1}}{2x^2}$

$$F'(x) > 0 \leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} > 2\sqrt{x^2+1}$$, che è sempre falsa.



3.

La funzione è definita e continua nell'intervallo [-1 , 3] ; quindi l'integrale esiste.
Poiché

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

possiamo riscrivere :

$$\int_{-1}^{3} (x+1)\sqrt{4-(x-1)^2}\, dx.$$

Poniamo $(x-1)/2 = t$:

$$\int_{-1}^{1} 8(1+t)\sqrt{1-t^2}\, dt = 8\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\, dt + 8\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\, dt = 4\pi$$

(A secondo membro, il primo integrale è l'area del semicerchio di raggio 1, il secondo è nullo perché la funzione è dispari e l'integrale è esteso ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine).

3.

(a) $a_n \approx e^{nx} / n \quad ; \quad \sqrt[n]{e^{nx}/n} \to e^x$.
Se $x < 0$, la serie converge ; se $x > 0$, la serie diverge.
Se $x = 0$, il termine generale della serie diventa $1/n$; la serie diverge.

(b) Se $x > 1$, $a_n \approx \dfrac{n \log x}{n^{2x}} = \dfrac{\log x}{n^{2x-1}}$; la serie converge (serie armonica ; $2x - 1 > 1$)

Se $x = 1$, $a_n = \frac{\log(1+n)}{n^2} \approx \frac{\log n}{n^2} < \frac{n^{\alpha}}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\alpha}}$; basta prendere per α un valore < 1 per concludere con la convergenza della serie.

Se $0 < x < 1$, $a_n \approx \frac{x \log n}{n^{2x}}$; la serie converge se $2x > 1$ (cioè per $\frac{1}{2} < x < 1$) , diverge se $2x \leq 1$ (cioè per $0 < x \leq \frac{1}{2}$) .