Soluzioni

1.

Riscriviamo la funzione nella forma $e^{\frac{\log|\operatorname{sen} x|}{\cos x}}$.
La funzione è pari (quindi basta studiarla per $x \geq 0$) e periodica di periodo 2π (quindi basta studiarla per $-\pi \leq x \leq \pi$) ; in conclusione, possiamo limitarci a studiarla in $[0, \pi]$. I calcoli successivi si riferiscono a questa scelta.

C.E. $\quad [0, \pi] - \{0, \pi/2, \pi\}$

SGN $\quad$ Sempre positiva

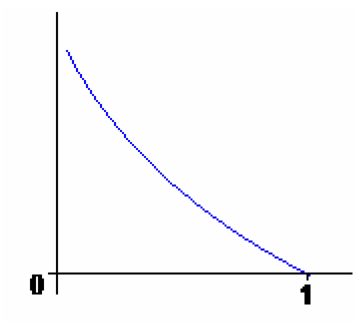
LIMITI $\quad$ Per $x \to 0$ $\quad f(x) \to 0$ d.e.

per $x \to \pi/2$ $\quad \dfrac{\log \operatorname{sen} x}{\cos x} \underset{=}{H} \dfrac{\cos x}{-\operatorname{sen}^2 x} \to 0$; $f(x) \to 1$ d.e.

per $x \to \pi$ $\quad f(x) \to +\infty$ as. vert.

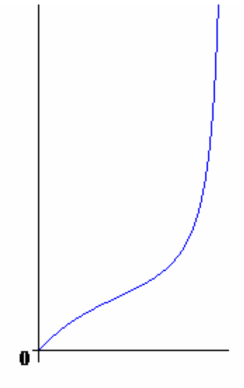
DRV $\quad$ $$f'(x) = e^{\frac{\log|\operatorname{sen} x|}{\cos x}} \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} \log(\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}$$

Il segno della derivata è quello del numeratore e si ottiene per via grafica; ponendo $t = \operatorname{sen}^2 x$, ci riduciamo a studiare la funzione $g(t) = 1 - t + (t \log t)/2$ nell'intervallo $0 < t \leq 1$. Tenendo anche conto del fatto che la sua derivata è $(\log t - 1)/2$, ne deduciamo facilmente il grafico :



Da questo deduciamo che la derivata f ' (x) è sempre positiva.

GRAFICO



nell'intervallo considerato

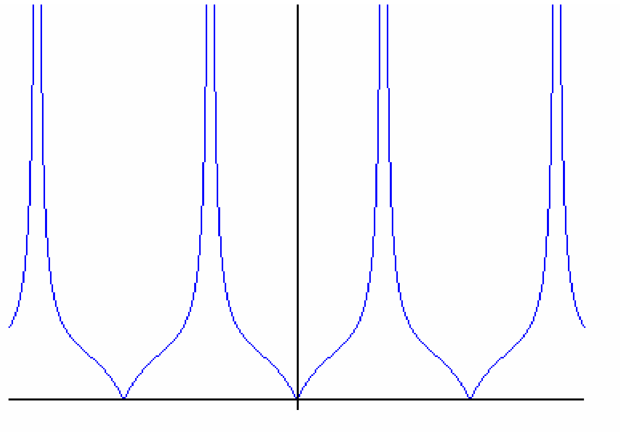


grafico complessivo

DRV nei punti singolari

Per $x \to 0$ $\quad f'(x) \sim x(1/x + x \log x) \to 1$

$f'(0) = 1$

per $x \to \pi/2$ $\quad f'(x) \sim 1 + (\operatorname{sen} x - 1)/(1 - \operatorname{sen}^2 x) \to 1/2$

$f'(\pi/2) = 1/2$.

2.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \log \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\frac{\log \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

$$\exp \frac{\log \cos x}{x^2} = e^{-1/2}\, e^{-x^2/12 + o(x^2)} = e^{-1/2}(1 - x^2/12 + o(x^2))$$

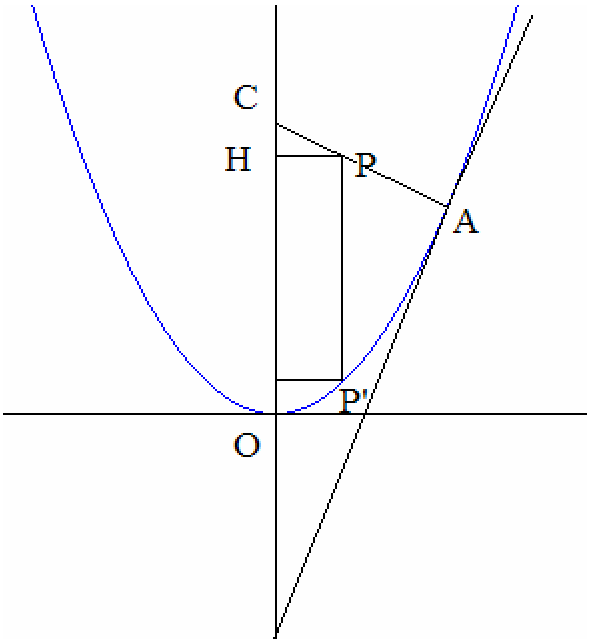
$$\exp \frac{\log \cos x}{x^2} = e^{-1/2}\, e^{-x^2/12 + o(x^2)} = e^{-1/2}(1 - x^2/12 + o(x^2))$$

$$\log \frac{1+x}{1+3x^2} = \log[(1+x)(1-3x^2 + o(x^2)] =$$

$$= \log(1 + x + 3x^2 + o(x^2)) = x - 7x^2/2 + o(x^2)$$

Il limite vale $1/42\sqrt{e}$.

3.



$A = (4, 1)$ $\quad f'(4) = \frac{1}{2}$

retta normale $y = 9 - 2x$

$P = (x, 9 - 2x)$ $\quad P' = (x, x^2 / 16)$

$PP' = 9 - 2x - x^2 / 16$ $\quad PH = x$

$A(x) = 2x(9 - 2x - x^2 / 16)$

con $0 \leq x \leq 4$.

Massimo per $x = 4(\sqrt{91} - 8) / 3$.

4.

Deve essere $w \neq -z$.

Poniamo $z = x + iy$, $w = a + ib$; sostituendo nella prima equazione , si ottiene $b = y$; dunque $w = a + iy$.

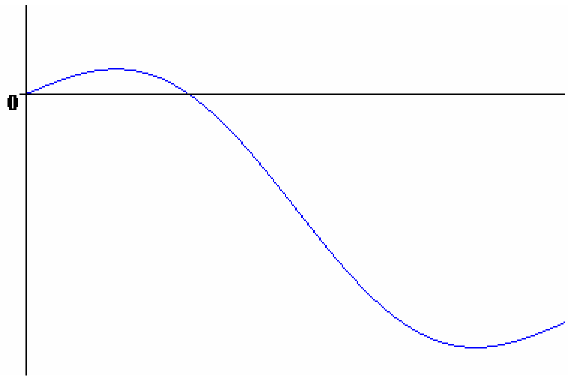
Sostituendo nella seconda equazione , si ottiene il sistema

$$x^2 - 2y^2 + a^2 = -1 \ , \ (x + a)y = 0 .$$

Se $y = 0$, deve essere $x^2 + a^2 = -1$ e questa equazione non ha soluzioni.
Se $a = -x$, si ottiene $2x^2 - 2y^2 = -1$.
In conclusione , il sistema ammette come soluzioni per z tutti i numeri complessi $z = x + iy$ con $2x^2 - 2y^2 = -1$; nel piano complesso i punti corrispondenti stanno dunque su un'iperbole.
Per w si ottiene che deve essere $w = -\bar{z}$; nel piano complesso anche queste soluzioni sono rappresentate dalla stessa iperbole.

5.

Il grafico della funzione $2 \operatorname{sen} x - x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è riportato in figura (il punto di massimo è $\pi / 3$, quello di minimo $5\pi / 3$) :



Scegliamo [1, 2] come intervallo a cui applicare il metodo delle tangenti : in questo intervallo risulta f (1) < 0 < f (2) e inoltre f ' < 0 , f " < 0 .
La successione ricorsiva è data da :

$$x_0 = \pi \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{2 \text{ sen } x_n - x_n}{2 \cos x_n - 1} .$$

Valori calcolati :

$x_1 = 1{,}900995594$ $x_2 = 1{,}89551645$ $x_3 = 1{,}895494267$

Poiché $x_4 = 1{,}895494267$, la soluzione è stata calcolata con 9 cifre decimali esatte.