Introduzione alla Matematica

Prova scritta del 7.2.08

Soluzioni

1.

(a) *Numeratore*

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{6} \;{}_{+2k\pi} \;\Leftrightarrow\; \frac{5\pi}{6} < x < \frac{13\pi}{6} \;{}_{+4k\pi} \;.$$

Limitatamente all'intervallo [0 , 2π] il numeratore è positivo in (5π/6 , 2π] .

Denominatore

senx cos2x $> 1 \;\Leftrightarrow\;$ senx (1 - 2 sen^{2}x) $> 1 \;\Leftrightarrow\;$ 2 sen^{3}x - senx + 1 < 0

Osservato che il polinomio in senx si annulla per senx = -1 , dopo aver diviso per senx + 1 si arriva alla scomposizione (senx + 1) (2 sen^{2}x – 2 senx + 1) ; questo prodotto non è mai negativo , dato che entrambi i fattori sono sempre positivi (il primo di annulla per sen x = -1 , cioè x = 3 π / 2) .

Conclusione

La disequazione è dunque verificata per $0 \le x < 5\pi / 6$) .

(b)

La disequazione ha senso per $0 \le$ senx $\le$ ½ .

Riscritta nella forma $2\sqrt{\text{senx}} > 1 + \sqrt{1 - 2\,\text{senx}}$, elevando al quadrato e semplificando si ottiene 3 senx – 1 $> \sqrt{1 - 2\,\text{senx}}$.

Perché la disequazione abbia soluzioni, dobbiamo imporre l'ulteriore condizione senx $\ge 1/3$; elevando ulteriormente al quadrato e semplificando, si ottiene che deve essere 9 sen^{2}x – 4 senx < 0 , cioè $0 <$ senx $< 4/9$.

In definitiva si ottiene $1/3 \le$ senx $< 4/9$, da cui segue :

arcsen 1/3 $\le x <$ arcsen 4/9 opp. π – arcsen 4/9 $< x \le$ π – arcsen 1/3 $\quad + 2k\pi$

2.

$$\text{C.E.} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \le 2^{-1/x} \le 1 \\ \arccos 2^{-1/x} > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \neq 0 \\ -1/x \le 0 \\ 2^{-1/x} \neq 1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x > 0 \,.$$

$$\text{SGN} \quad f(x) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \arccos 2^{-1/x} \ge 1 \;\Leftrightarrow\; 2^{-1/x} \le \cos 1 \;\Leftrightarrow$$

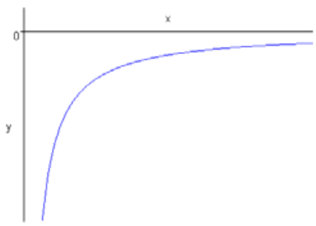
$$-1/x \le \log_2 \cos 1 \;\Leftrightarrow\; 1/x \ge -\log_2 \cos 1 \;\Leftrightarrow$$

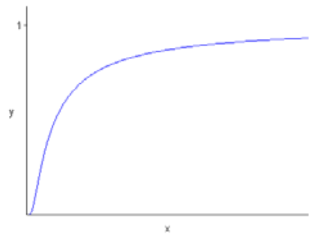
$$x \le -1/\log_2 \cos 1$$

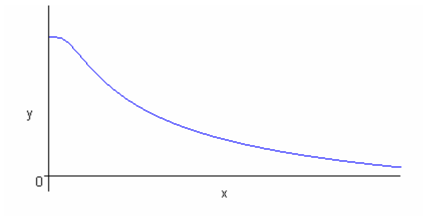
MONOTONIA

$-1/x$ crescente ; $2^{-1/x}$ crescente ; arcos $2^{-1/x}$ decrescente ;
$\log_2$ arcos $2^{-1/x}$ decrescente

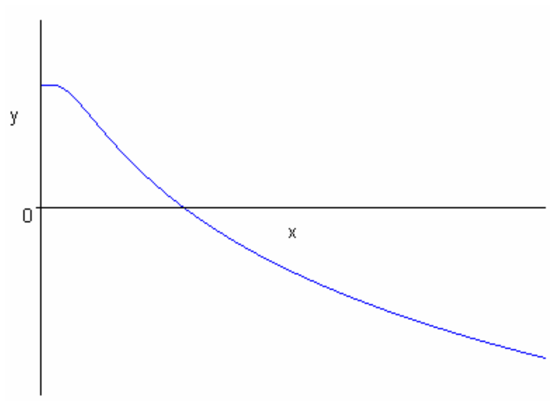
GRAFICO







$1/x$ $\qquad$ $2^{-1/x}$ $\qquad$ arccos $2^{-1/x}$



f (x)

IMMAGINE E INVERTIBILITA'

$$f(x) = k \iff \arccos 2^{-1/x} = 2^k$$

$$\iff 2^{-1/x} = \cos 2^k \quad \text{purché sia } 0 \le 2^k \le \pi$$

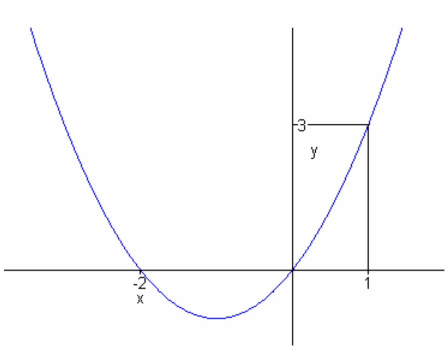
$$\iff -1/x = \log_2 \cos 2^k \quad \text{purché sia } \cos 2^k > 0$$

$$\iff x = -1/\log_2 \cos 2^k \ .$$

Il risultato trovato è dunque valido se $2^k \le \pi / 2$.
In definitiva dunque l'immagine della funzione è $(-\infty , \log_2 \pi / 2]$, la funzione è invertibile e la sua inversa è $f^{-1}(k) = -1/\log_2 \cos 2^k$.

3.

Posto $\cos x = t$, il problema diventa quello di discutere l'equazione $t^2 + 2t = k$ con la condizione che risulti $0 \leq t \leq 1$.
Il problema può essere risolto facilmente per via grafica :

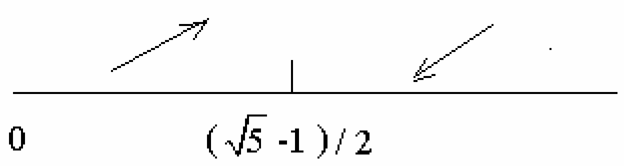


L'equazione data ammette soluzioni se e solo se $0 \leq k \leq 3$; in tal caso la soluzione è unica.

4.

Per induzione è immediato verificare che la successione è ben definita , nel senso che non assume mai il valore -2 (anzi è sempre positiva , eccetto al primo passo) .

$x_{n+1} \geq x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 + x_n - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n \leq (\sqrt{5} - 1)/2$.



Poiché $x_1 = 0$, rimane da provare che $x_n < (\sqrt{5} - 1)/2 \Rightarrow x_{n+1} < (\sqrt{5} - 1)/2$.

$$\frac{1 + x_n}{2 + x_n} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_n < 2\,\frac{\sqrt{5} - 2}{3 - \sqrt{5}} = 2\,\frac{(\sqrt{5} - 2)(3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

In conclusione , la successione data è crescente e si mantiene sempre inferiore al punto fisso $(\sqrt{5} - 1)/2$.