Introduzione alla matematica

Prova scritta del 17.1.08

Soluzioni

1.

(a) C.E. $4x^2 - 4|x| - 15 \geq 0 \iff |x| \geq 5/2$ opp. $|x| \leq -3/2$

$\iff x \geq 5/2$ opp. $x \leq -5/2$

SGN $f(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 5/2 \quad \text{opp. } x \leq -5/2 \\ \sqrt{4x^2 - 4|x| - 15} \leq 2x + 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geq 5/2 \\ 4x^2 - 4x - 15 \leq 4x^2 + 8x + 4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geq 5/2 \\ 12x \geq -19 \end{cases} \iff x \geq 5/2$

Dunque la funzione è positiva per $x \geq 5/2$, negativa per $x \leq -5/2$ e non si annulla mai.

(b) C.E. $\begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 > 0 \\ |x| / \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \leq 1 \end{cases}$

La prima disequazione è sempre verificata ; la seconda (e quindi il sistema) elevando al quadrato equivale a $x^2 \leq 2x^2 - 2x + 1$ cioè a $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ e anche questa è sempre verificata. Dunque C.E. = R .

SGN $f(x) \geq 0 \iff \arccos \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \leq \dfrac{\pi}{4}$

$\iff \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 \geq 2x^2 - 2x + 1 \end{cases} \iff x \geq 1/2 .$

Dunque la funzione è positiva per $x > 1/2$, negativa per $x < 1/2$ e si annulla per $x = 1/2$.

2.

C.E. $\sqrt{\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|} \le 1 \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + 4x + 4 \le x^2 - 2x + 1 \end{cases} \iff x \le -1/2$

SGN sempre positiva , eccetto che per x = - 2 per cui si annulla.

IMMAGINE e INVERTIBILITA'

$$\arcsin \sqrt{\left|\frac{x+2}{x-1}\right|} = k \in [-\pi/2 , \pi/2] \iff \sqrt{\left|\frac{x+2}{x-1}\right|} = \operatorname{sen} k$$

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \operatorname{sen}^2 k \quad \text{se } k \in [0 , \pi/2]$$

$$\frac{x+2}{x-1} = \operatorname{sen}^2 k \quad \text{opp.} \quad \frac{x+2}{x-1} = -\operatorname{sen}^2 k$$

$$x = \frac{-2 - \operatorname{sen}^2 k}{1 - \operatorname{sen}^2 k} \quad \text{se } k \in [0 , \pi/2) \quad \text{opp.} \quad x = \frac{-2 + \operatorname{sen}^2 k}{1 - \operatorname{sen}^2 k} \quad \text{se } k \in [0 , \pi/2]$$

Dobbiamo controllare se le soluzioni sono accettabili, cioè se appartengono al C.E. della funzione.

$$\frac{-2 - \operatorname{sen}^2 k}{1 - \operatorname{sen}^2 k} \le -\frac{1}{2} \iff \operatorname{sen}^2 k \ge -1 \qquad \text{che è sempre verificata}$$

$$\frac{-2 + \operatorname{sen}^2 k}{1 - \operatorname{sen}^2 k} \le -\frac{1}{2} \iff \operatorname{sen}^2 k \le 1 \qquad \text{che è sempre verificata.}$$

In conclusione , $f : (-\infty , -1/2] \to [0 , \pi/2]$, non invertibile.

Restringendo la funzione a $(-\infty , -2]$, dobbiamo controllare se le soluzioni trovate sono ancora entrambe accettabili.

$$\frac{-2 - \operatorname{sen}^2 k}{1 - \operatorname{sen}^2 k} \le -2 \iff \operatorname{sen}^2 k \ge 0$$

che è sempre verificata

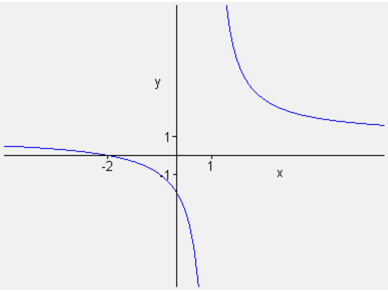
$$\frac{-2 + \operatorname{sen}^2 k}{1 - \operatorname{sen}^2 k} \le -2 \iff \operatorname{sen}^2 k \le 0$$

che è verificata solo se k = 0 , ma per questo valore le due soluzioni coincidono.

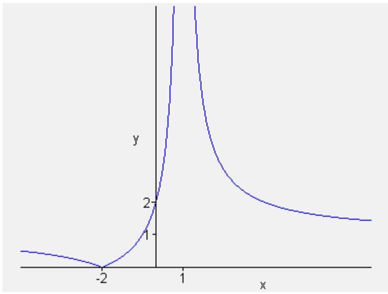
Dunque , f : $(-\infty , - 2] \rightarrow [0 , \pi / 2)$, invertibile

$$f^{-1}(k) = \frac{- 2 - \text{sen}^2 k}{1 - \text{sen}^2 k} .$$

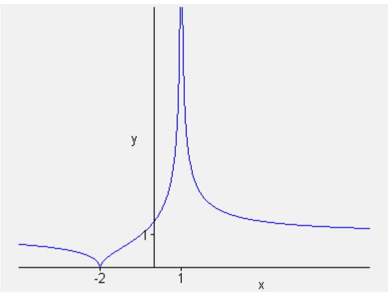
GRAFICO



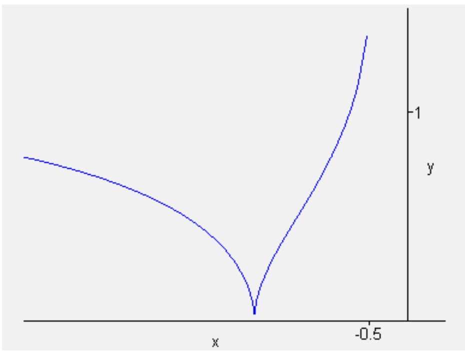
$y = (x + 2) / (x -1)$



$y = \left| (x + 2) / (x - 1) \right|$



$y = \sqrt{\left| (x + 2) / (x - 1) \right|}$



$y = \arcsin \sqrt{\left| (x + 2) / (x - 1) \right|}$

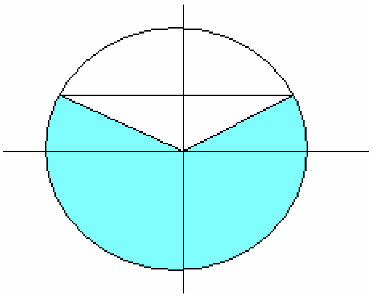
3.

Numeratore :

$$\sqrt{1 - \text{senx}} - \sqrt{2}\, \text{senx} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \text{senx}} \geq \sqrt{2}\, \text{senx}$$

$$\text{senx} \leq 0 \qquad \text{opp.} \qquad \begin{cases} \text{senx} > 0 \\ 1 - \text{senx} \geq 2\, \text{sen}^2 x \end{cases}$$

$$\text{senx} \leq 0 \qquad \text{opp.} \qquad 0 \leq \text{senx} \leq 1 / 2$$

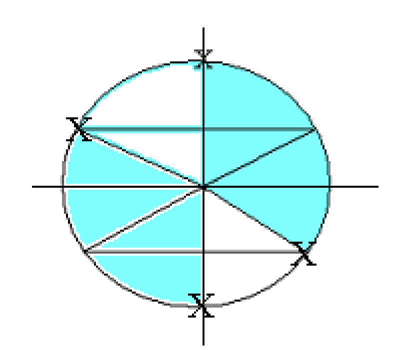


$x \in [\,0\,,\pi\,/\,6\,)\cup(\,5\,\pi\,/\,6\,,2\pi\,]\quad{}_{+2k\pi}$

Denominatore

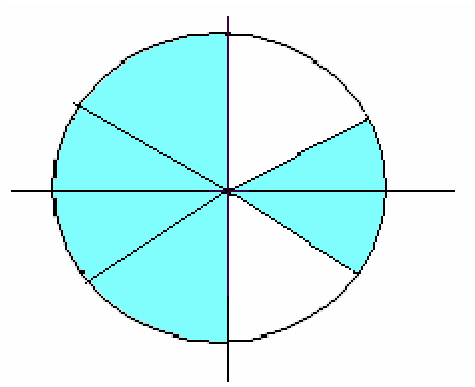
$2\ \mathrm{senx}\ \mathrm{cosx} + |\cos x| > 0$

$$\begin{cases}\cos x > 0\\ \mathrm{senx} > -1/2\end{cases}\quad \text{opp.}\quad \begin{cases}\cos x < 0\\ \mathrm{senx} > 1/2\end{cases}$$

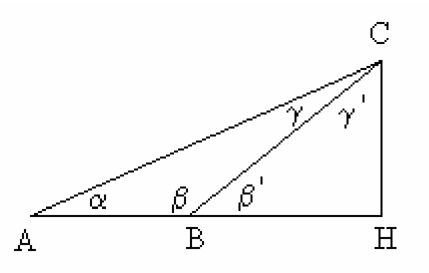


$x \in (\,-\pi\,/\,6\,,\ \pi\,/\,2\,)\quad{}_{+k\pi}$

Conclusione



4. (cenni)



Teorema di Carnot : $AC^2 = 4 + 9 + 12 / 5 = 77 / 5$ $AC = \sqrt{77 / 5}$

$CH = 3 \operatorname{sen}(\pi - \beta) = 3 \operatorname{sen}\beta = 3\sqrt{1 - 1/25} = 3\sqrt{24} / 5 = 6\sqrt{6} / 5$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{3} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{2} = \frac{2\sqrt{6} / 5}{\sqrt{77 / 5}}$$

$BH = 3\cos(\pi - \beta) = -3\cos\beta = 3 / 5$

perimetro ABC $= 5 + \sqrt{77 / 5}$

perimetro AHC $= 13/5 + 6\sqrt{6} / 5 + \sqrt{77 / 5}$

area AHC $= \frac{1}{2}(2 + 3/5)\sqrt{77 / 5} = 13\sqrt{77 / 5} / 10$

area ABC si può calcolare come differenza delle aree di 2 triangoli rettangoli

$\cos\beta = -1 / 5$ $\operatorname{sen}\beta = 2\sqrt{6} / 5$

Teorema dei seni : $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{3} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{2} = \dfrac{2\sqrt{6} / 5}{\sqrt{77 / 5}}$

$\operatorname{sen}\alpha = \ldots.$ $\cos\alpha = \ldots.$

$\operatorname{sen}\gamma = \ldots.$ $\cos\gamma = \ldots.$

$\cos\beta' = -\cos\beta = 1 / 5$ $\operatorname{sen}\beta' = \ldots.$

$\cos\gamma' = \cos(\beta - \pi/2) = \operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{sen}\gamma' = -\cos\beta$