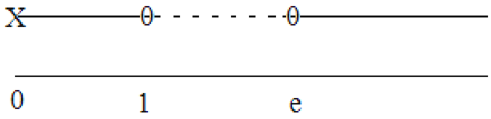
Soluzioni

1.

C.E. $x > 0$ SGN



$f(x) = k \leftrightarrow \log x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$ purché $k \geq -1/4 \leftrightarrow x = e^{(1 \pm \sqrt{1+4k})/2}$;

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

In conclusione : $f : (0, +\infty) \to (-\infty, -1/4]$ non è iniettiva .

Se restringiamo il dominio all'intervallo $(0, 1]$, la soluzione $e^{(1+\sqrt{1+4k})/2}$ non è accettabile (in quanto > 1) ; l'altra soluzione è accettabile se $(1 - \sqrt{1+4k})/2 \leq 0$, e questo accade se $k \geq 0$. La restrizione della funzione risulta dunque invertibile e la sua immagine è $[0, +\infty)$.

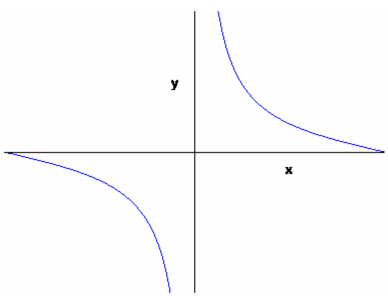
Questa restrizione è anche decrescente : $0 < x < y < 1 \to f(x) > f(y)$.

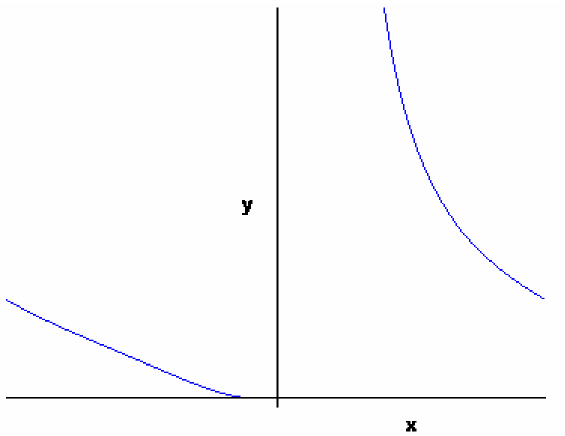
Infatti : $\log^2 x - \log x > \log^2 y - \log y \leftrightarrow \log^2 x - \log x - \log^2 y + \log y > 0 \leftrightarrow$
$(\log x - \log y)(\log x + \log y - 1) > 0 \leftrightarrow (\log x - \log y) \log(xy/e) > 0$
Nel prodotto finale risulta $\log x - \log y < 0$ perché $x < y$. E' anche $\log(xy/e) < 0$: infatti questo equivale a $xy/e < 1$, cioè $xy < e$ che è vera perché $0 < x, y < 1$.

2.

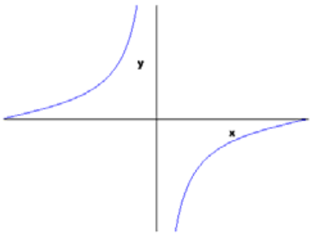
Sono funzioni di periodo π : le studiamo tra $-\pi/2$ e $\pi/2$

$1/\text{tg}x$ $e^{1/\text{tg}\,x}$

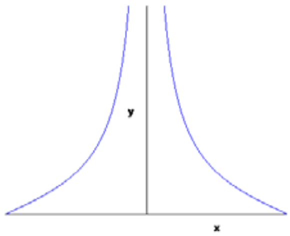




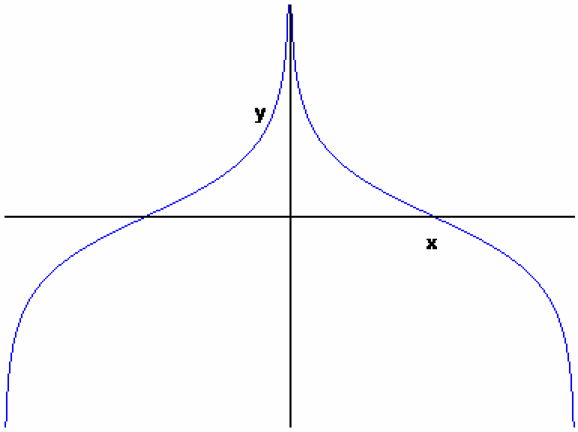
$\mathrm{tg}\,(x - \pi/2)$



$|\,\mathrm{tg}\,(x - \pi/2)\,|$



$\log|\,\mathrm{tg}\,(x - \pi/2)\,|$



3.

(a) $1 - |x| < 0 \quad \text{opp.} \quad \begin{cases} 1 - |x| \geq 0 \\ |x^2 - 4| > x^2 - 2|x| + 1 \end{cases} \quad \leftrightarrow$

$x < -1 \quad \text{opp.} \quad x > 1 \quad \text{opp.} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 > x^2 - 2|x| + 1 \end{cases} \quad \leftrightarrow$

$x < -1 \quad \text{opp.} \quad x > 1 \quad \text{opp.} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - 2|x| - 3 < 0 \end{cases} .$

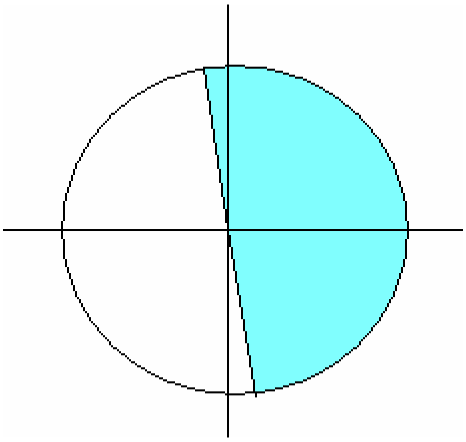
La disequazione del sistema è verificata se $(1 - \sqrt{7})/2 < |x| < (1 + \sqrt{7})/2$; poiché la prima condizione è sempre verificata , si ottiene

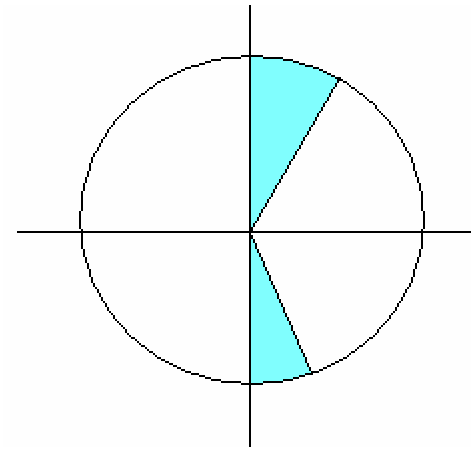
$x < -1 \quad \text{opp.} \quad x > 1 \quad \text{opp.} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} < x < \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$

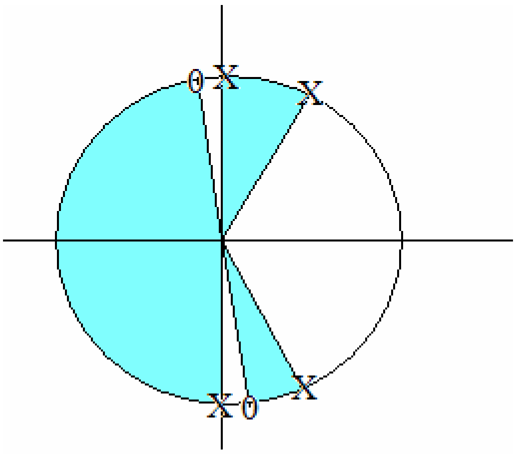
x < -1 opp. x > 1 opp. $-1 \le x \le 1$ $\leftrightarrow$ la disequazione è sempre verificata.

(b) $\text{sen } x + 2 \cos x \ge 0$

$2 \text{ sen}^2 x + \cos x - 2 \ge 0$
$2 \cos^2 x - \cos x \le 0$

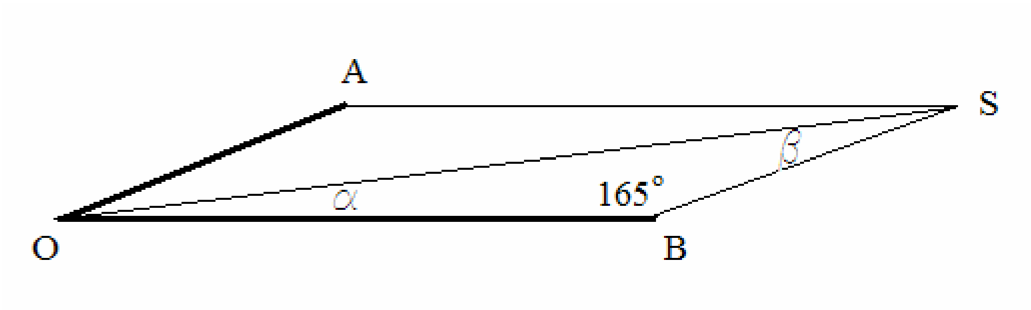






$\pi / 3 < x < \pi / 2$ opp. $\pi - \text{arctg } 2 \le x < \pi / 2$ opp. $2\pi - \text{arctg } 2 \le x < 5\pi / 3$.

4.



Teorema di Carnot : $| OS |^2 = 5 - 4 \cos 165^o = 5 - 4 \cos (180^0 - 30^0 / 2) = 5 + 4 \cos (30^0 / 2)$

$$= 5 + 4 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = 5 + 2 \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$| OS | = \sqrt{5 + 2 \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \sim 2.977$$

Teorema dei seni : $\frac{\text{sen } \alpha}{1} = \frac{\text{sen } 165^0}{| OS |} \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}}}{\sqrt{5 + 2 \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \approx 0{,}087$

$\alpha \approx 5^0 \quad \beta \approx 10^0$