Introduzione alla Matematica – C. di L. in Chimica Molecolare

Soluzioni della prova scritta dell'11 gennaio 2007

1.

$$f(x) = \begin{cases} \log\,(x^2 - 4x + 2) & \text{se } x \le 0 \text{ oppure } x \ge 3 \\ \log\,(-x^2 + 2x + 2) & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$$

C.E.

I caso : $\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) \\ x^2 - 4x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$

II caso : $\begin{cases} x \in (0, 3) \\ -x^2 + 2x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1 + \sqrt{3})$

In conclusione , C.E. = $(-\infty, 1 + \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$.

Possiamo dunque riscrivere :

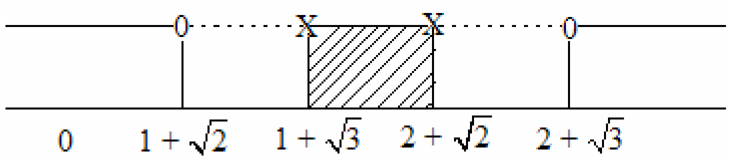
$$f(x) = \begin{cases} \log\,(x^2 - 4x + 2) & \text{se } x \le 0 \text{ oppure } x > 2 + \sqrt{2} \\ \log\,(-x^2 + 2x + 2) & \text{se } 0 < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

SEGNO

Studiamo la condizione $f(x) \ge 0$.

I caso : $\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty) \\ x^2 - 4x + 2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty)$

II caso : $\begin{cases} x \in (0, 3) \\ -x^2 + 2x + 2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1 + \sqrt{2}]$



2.

$f(x) = \log(x^2 - 4x + 2)$, $x \le 0$

$$\log(x^2 - 4x + 2) = k \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = e^k \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2 + e^k}$$

Delle due soluzioni una è sicuramente da scartare, perché non rientra nel dominio di definizione. L'altra è accettabile se $2 - \sqrt{2 + e^k} \le 0 \iff k \ge \log 2$.

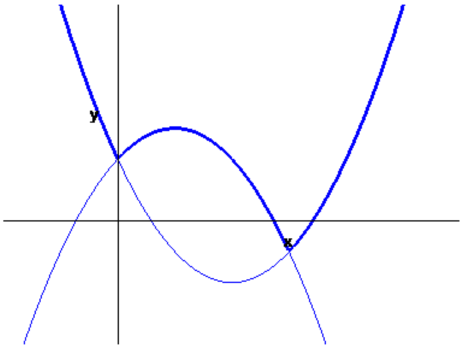
I calcoli provano che la funzione considerata è invertibile , che la sua immagine è $[\log 2 , +\infty)$, che l'inversa è data da $f^{-1}(k) = 2 - \sqrt{2 + e^k}$.

3.

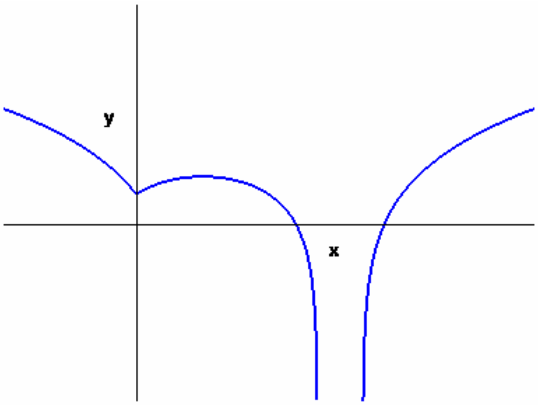
Iniziamo disegnando le due parabole

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad , \quad y = -x^2 + 2x + 2$$

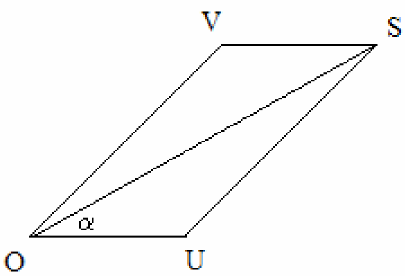
e sovrapponiamole , cioè consideriamo la prima per $x \le 0$ e per $x \ge 3$, la seconda per $0 \le x \le 3$.



Adesso applichiamo la funzione logaritmo :



4.



Teorema del coseno :

$$OS^2 = 1 + 4 - 4 \cos 135^0 = 5 + 2\sqrt{2}$$

$$OS = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

Teorema dei seni

$$\frac{2}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{OS}{\text{sen}\,135^0} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{5 + 2\sqrt{2}}}$$

$\alpha \sim 30^0\,21'$

5.

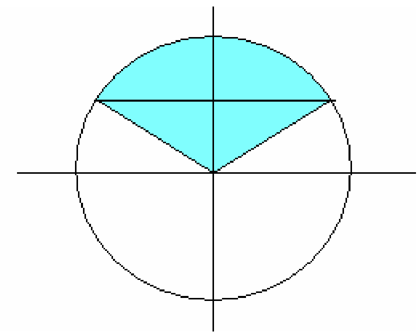
(i)

Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore :

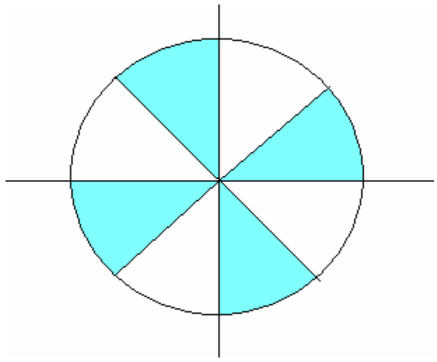
$$\text{sen}\, x - \cos 2x = 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, x \leq -1 \text{ opp } \text{sen}\, x \geq 1/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ opp } x = \frac{3\pi}{2}$$

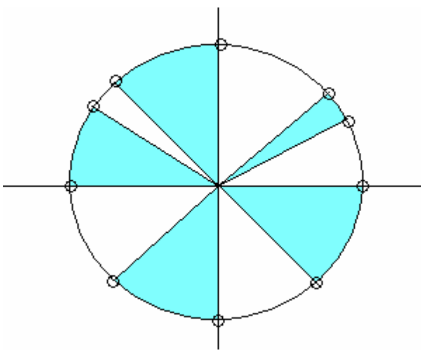
$$\text{tg}\, 2x \geq 0 \Leftrightarrow k\pi \leq 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow k\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



numeratore



denominatore



$\pi/6 < x < \pi/4$, $\pi/2 < x < 3\pi/4$, $5\pi/6 < x < \pi$

$5\pi/4 < x < 3\pi/2$, $7\pi/4 < x < 2\pi$

$+ 2k\pi$

(ii)

La disequazione è sicuramente verificata per $x \geq 0$.
Per $x < 0$, riscritta nella forma $\sqrt{|x - 1|} > -x$, possiamo elevare ambo i membri al quadrato :

$$|x - 1| > x^2 \Leftrightarrow x - 1 > x^2 \text{ opp. } x - 1 < -x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 0 \text{ opp. } x^2 + x - 1 < 0.$$

La prima disequazione non ha soluzioni, la seconda disequazione (insieme alla condizione $x < 0$) fornisce $(-1 - \sqrt{5})/2 < x < 0$.
In conclusione , la disequazione è verificata per $x > (-1 - \sqrt{5})/2$.