Soluzioni della prova scritta parziale n . 3 del 7 . 2 . 06

1.

(I) $f(t)$ è pari , quindi basta studiarne il comportamento per $t \geq 0$.
La funzione è integrabile in un intorno di 1 , perché per $t \to 1$ $f(t) \sim c / |t-1|^{1/4}$, cioè è infinito di ordine ¼ .
La funzione non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$ perché per $t \to +\infty$ $f(t) \sim 1/|t|^{1/2}$, cioè è infinitesima di ordine 1 / 2 .

(II)

C.E. R ; la funzione è dispari e quindi si può studiare in $[0, +\infty)$

SEGNO $F(x) > 0$ per $x > 0$, $F(0) = 0$

LIMITI per $x \to +\infty$ $F(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{|\xi^2 - 1|}} \approx \dfrac{x}{\sqrt{\xi}} > \dfrac{x^2}{\sqrt{2x}} \to +\infty$ (senza asintoto obliquo)

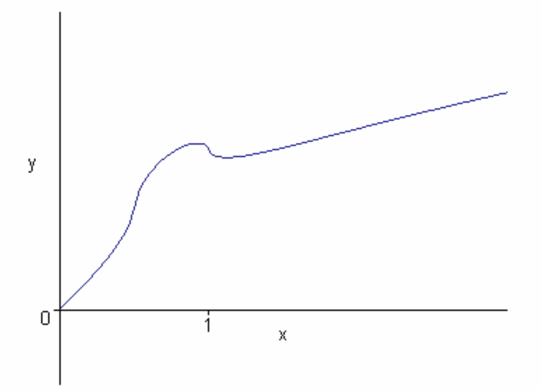
DERIVATA $\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{|x^2-1|} \geq \sqrt[4]{|4x^2-1|} \Leftrightarrow 16|x^2-1| \geq |4x^2-1|$ per $x \neq 1$, $x \neq ½$

I punti $x = 1$, $x = ½$ sono a tangente verticale

. $F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt[4]{|x^2-1|} \geq \sqrt[4]{|4x^2-1|} \Leftrightarrow 16|x^2-1| \geq |4x^2-1|$

————X————0-----X-------0——————
0 ½ √(17 / 20) 1 √5 / 2

GRAFICO

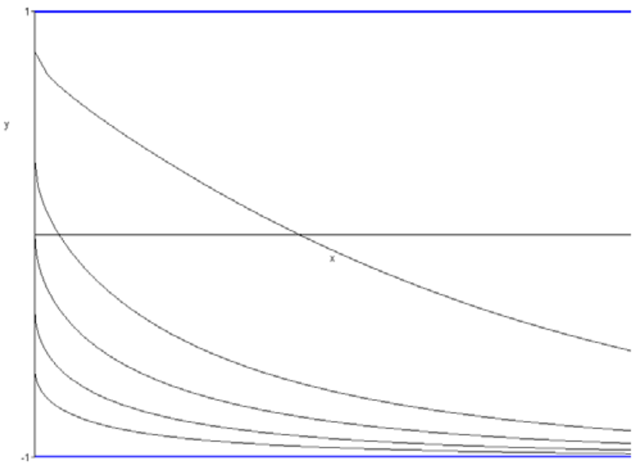


2.

L'equazione è definita per $x > 0$ e (richiesta del problema) per $-1 \leq y \leq 1$.
$y = \pm 1$ sono soluzioni costanti .
Per $-1 < y < 1$, separiamo le variabili ed integriamo :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2-1} = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{\sqrt{s}} \Leftrightarrow \log\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = 2(\sqrt{x} + c) \Leftrightarrow y = \frac{1 - k e^{2\sqrt{x}}}{1 + k e^{2\sqrt{x}}}$$

con $k > 0$; le soluzioni sono definite per $x > 0$.



3.

(i) La funzione è infinita per $x \to \pi / 4$; per studiarne la parte principale , per prima cosa osserviamo che $f(x) \approx 1 / [2 (1 - tg\, x)]$. Posto $t = x - \pi / 4 \to 0$, si ottiene $tg\, x = (1 + tg\, t) / (1 - tg\, t)$ e dunque $f(t) = (tg\, t - 1) / (4\, tg\, t) \approx -1 / (4 t)$. Poiché la funzione risulta essere un infinito di ordine 1 per $x \to \pi / 4$, l'integrale non esiste.

(ii) Posto $t = tg\, x$ e poi $z = t^2$, si ottiene $\int_0^1 \frac{t}{(1-t^2)(1+t^2)}\, dt$ e poi $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)(1+z)}$.

Con il metodo di Hermite si trova che una primitiva è data da $\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right|$. Poiché questa funzione diverge per $z \to 1$, l'integrale non esiste.

4.

Il polinomio caratteristico $k^3 + k$ ha come radici $0 , \pm i$, a cui corrispondono come base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea le funzioni $1 , \cos x , \operatorname{sen} x$.
Per trovare una soluzione particolare , passiamo in campo complesso , sostituendo il termine noto con $4 x \exp (i x)$; cerchiamo una soluzione nella forma $x (A x + B) \exp (i x)$. Calcolando le derivate successive e sostituendo nell'equazione , si trova che deve essere $A = -1$, $B = -3 i$. Della funzione complessa $- x (x + 3 i) (\cos x + i \operatorname{sen} x)$ prendiamo la parte immaginaria $- x (3 \cos x + x \operatorname{sen} x)$.
Le soluzioni dell'equazione differenziale sono dunque le funzioni $y = -3 x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x + a + b \cos x + c \operatorname{sen} x$, con a , b , c costanti arbitrarie.