Istituzioni di Matematiche I - C. di l. in Chimica
Soluzioni della prova scritta parziale n . 3 dell' 11 . 1 . 06

1.

(I) La funzione f (t) è integrabile in un intorno di 0 e in intorno di 1 , perché questi sono due discontinuità eliminabili . Infatti :
per $t \to 0$ $f(t) \sim -t \log t \to 0$
per $t \to 1$ $f(t) \sim (t-1)/2(t-1) \to 1/2$.
La funzione non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$ perché
per $t \to +\infty$ $f(t) \sim \log t / t > 1/t$.

(II)

C.E. $[0, +\infty)$

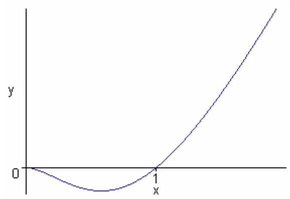
SEGNO $F(x) > 0$ per $x > 1$, $F(x) < 0$ per $0 < x < 1$, $F(0) = F(1) = 0$.

LIMITI per $x \to +\infty$ $F(x) = \dfrac{(x^2 - x)\ \xi \log \xi}{\xi^2 - 1} \approx \dfrac{x^2 \log \xi}{\xi} > \dfrac{x^2 \log x}{x^2} \to +\infty$

senza asintoto

DERIVATA $F'(x) = \dfrac{2x^3}{x^4 - 1} \log x^2 - \dfrac{x}{x^2 - 1} \log x = \dfrac{x(3x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \log x$

-------------0————————————
0 $1/\sqrt{3}$



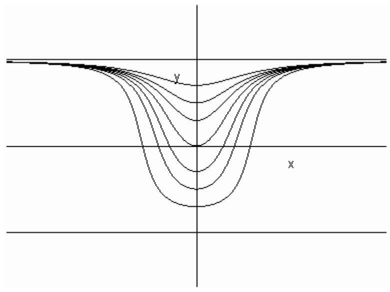
2.

L'equazione è definita per x , y$\in$ **R** ; come indicato nel testo , la studiamo per $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.
Le funzioni $y = \pm \pi / 2$ sono soluzioni costanti ; per trovare le altre soluzioni , procediamo nel modo consueto , separando le variabili e integrando :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\cos^2 s} = \int_{x_0}^{x} 2s\ ds$$

$$\operatorname{tg} y = x^2 + c \quad (c = \operatorname{tg} y_0 - x_0^{\ 2})$$

$$y = \operatorname{arctg} (x^2 + c) \quad , \quad x \in R$$



L'unicità di soluzione per il problema con la condizione iniziale è assicurata dal fatto che la funzione $1 / \cos^2 y$ non è integrabile in nessun intorno di $\pm \pi/2$ (basta osservare che le primitive $\operatorname{tg} y + c$ divergono per $y \to \pm \pi/2$) .

3.

Poiché $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, posto $\operatorname{tg} x = t$, $dx = dt / (1 + t^2)$, si ottiene $\displaystyle\int \frac{t}{4t^2 + 3}\, dt$. Ponendo ulteriormente $4t^2 + 3 = s$, $8t\, dt = ds$, l'integrale diventa $\displaystyle\int \frac{ds}{8s}$.

In definitiva le primitive sono $\frac{1}{8} \log | s | + c$, ovvero $\frac{1}{8} \log \left| 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 \right| + c$.

4.

La prima serie è positiva se $x \geq 0$, a segno alterno se $x < 0$.
Se $x = 0$, la serie è nulla e dunque converge . Per $x \neq 0$, applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti , si ottiene :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = | x | \frac{n \log n}{(n+1) \log (n+1)} \to | x |$$

Quindi , per $| x | < 1$ la serie converge , per $| x | > 1$ non converge . Nei casi in cui il criterio non permette di concludere , si ottiene per sostituzione diretta che per $x = 1$ la serie diverge (confronto con un integrale) , per $x = -1$ converge (teorema di Leibnitz).

La seconda serie è positiva e $a_n \approx e^{nx} = (e^x)^n$; questa serie geometrica converge per $x < 0$, diverge per $x \geq 0$.