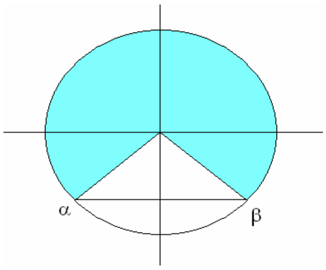
Soluzioni della prova scritta n.2 del 7. 2. 06

1.

C.E. R ; poiché la funzione è 2π – periodica , possiamo limitarci a studiarla in $[\,0\,,\,2\pi\,]$

SEGNO $f(x) \geq 0 \iff 2\,\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x - 1 \leq 0 \iff \mathrm{sen}\,x \geq (1-\sqrt{3})/2$

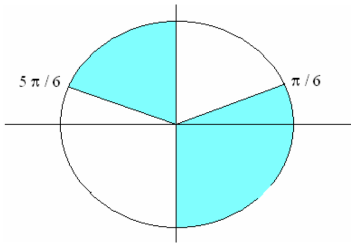


$\alpha = \pi - \mathrm{arcsen}\,(1-\sqrt{3})/2$

$\beta = 2\pi + \mathrm{arcsen}\,(1-\sqrt{3})/2$

DERIVATA $f'(x) = 2\cos x\,(1 - 2\,\mathrm{sen}\,x)$

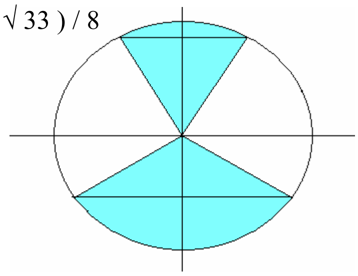
segno derivata



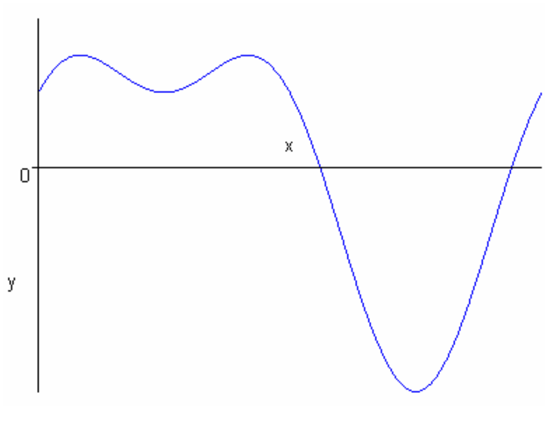
$f''(x) = 2\,(4\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,x - 2) \geq 0$

per $\mathrm{sen}\,x \leq (1-\sqrt{33})/8$ opp. $\mathrm{sen}\,x \geq (1+\sqrt{33})/8$

segno derivata seconda



GRAFICO

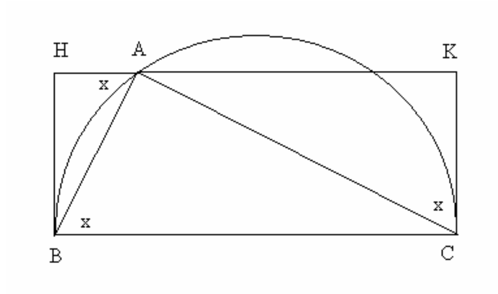


2.

$\mathrm{sen}\,x^2 = x^2 + o(x^4)\ ,\quad \mathrm{sen}^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$
$\cos x^2 = 1 - x^4/2 + o(x^4)\ ,\quad \cos^2 x = 1 - x^2 + o(x^2)$

$$f(x) \approx \frac{x^4}{3x^{\alpha+2}} = \frac{x^{2-\alpha}}{3} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 1/3 & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}$$

3.



$AB = 2\sqrt{2}\cos x \qquad AC = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,x$

$BH = AB\,\text{sen}\,x = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,x\,\cos x = \sqrt{2}\,\text{sen}\,2x$

$AH = AB\cos x = 2\sqrt{2}\cos^2 x$

$AK = AC\,\text{sen}\,x = 2\sqrt{2}\,\text{sen}^2 x$

volume cilindro $\quad \pi\, HB^2\, HK = 4\sqrt{2}\,\pi\,\text{sen}^2\,2x$

volume cono n.1 $\quad \pi\, HB^2\, AH\ /\ 3 = 4\sqrt{2}\,\pi\,\text{sen}^2\,2x\ \cos^2 x\ /\ 3$

volume cono n.2 $\quad \pi\, HB^2\, AK\ /\ 3 = 4\sqrt{2}\,\pi\,\text{sen}^2\,2x\ \text{sen}^2 x\ /\ 3$

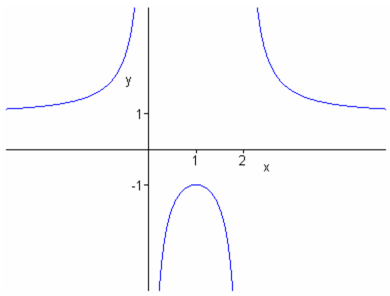
$V = 8\sqrt{2}\,\pi\,\text{sen}^2\,2x\ /\ 3 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi/2$

$V' = 16\sqrt{2}\,\pi\,\text{sen}\,4x\ /\ 3$

L'unico punto stazionario nell'intervallo è $x = \pi / 4$; poiché agli estremi la funzione si annulla , questo è il punto di massimo cercato.

4.

Lo studio della funzione non presenta alcuna difficoltà particolare : ci limitiamo a riportare il grafico



Perché l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) \geq k$ contenga un intorno di 1 deve essere $k < -1$.
Per trovare esplicitamente questo intorno , dobbiamo risolvere l'equazione $f(x) = k$, che possiamo riscrivere nella forma

$$(1-k)x^2 - 2(1-k)x + 2 = 0 .$$

Le soluzioni sono

$$x = \frac{1-k \pm \sqrt{k^2-1}}{1-k} = 1 \pm \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} .$$

5.

Al valore $z = 0$ corrisponde la soluzione $w = 0$.
Per trovare soluzioni $z \neq 0$, dalla prima equazione ricaviamo $w = -z / |z|$ e sostituiamo nella seconda equazione ; poiché $|w| = 1$, questa diventa $-z / |z| - \bar{z} = 0$, cioè $z = -|z|\,\bar{z}$. In forma esponenziale possiamo riscrivere $r \exp(i\theta) = r^2 \exp(i(-\theta + \pi))$, ottenendo : $r = 1$, $\theta = \pi/2 + k\pi$ con $k = 0, 1$.
In forma algebrica le soluzioni sono $z_1 = i$, $z_2 = -i$, cui corrispondono per w i valori $w_1 = -i$, $w_2 = i$.