Soluzioni della prova scritta di Introduzione alla Matematica del 28.06.06

1.

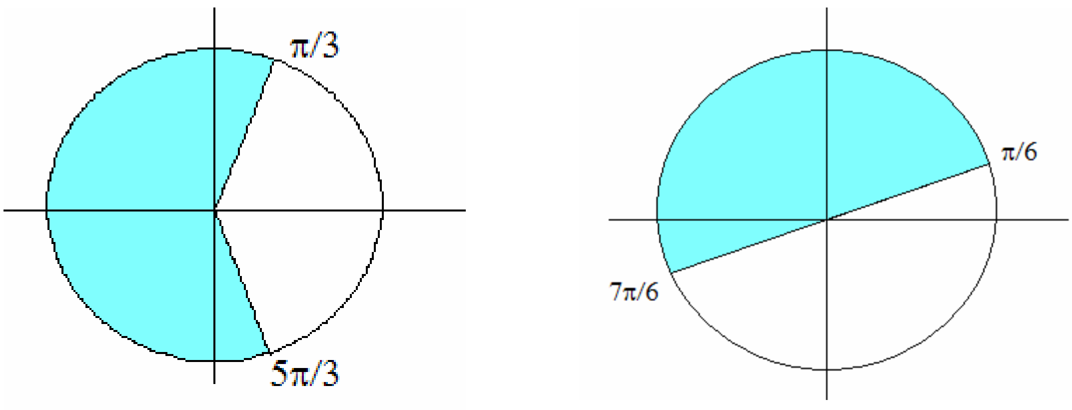
$$-\sqrt{x^2+1} = \alpha \iff x^2+1 = \alpha^2 \text{ con } \alpha \le 0 \iff x = \pm\sqrt{\alpha^2-1} \text{ con } \alpha \le -1$$

La soluzione negativa è da scartare; quella positiva cade nel dominio della funzione data se risulta $-\sqrt{\alpha^2-1} \ge -2$ e questo accade se $-\sqrt{5} \le \alpha \le -1$.

In conclusione:
l'immagine della funzione è $[-\sqrt{5}, -1]$ e la funzione inversa è $f^{-1}(\alpha) = -\sqrt{\alpha^2-1}$.

2.

(a) Segno del numeratore e del denominatore (le parti colorate sono quelle di positività):



La disequazione è verificata in $(0, \pi/6) \cup (\pi/3, 7\pi/6) \cup (5\pi/3, 2\pi)$.

(b) Prendendo il logaritmo in base 10 di ambo i membri, le due equazioni si possono riscrivere nella forma: $x \operatorname{Log} y = 4$, $(1/x) \operatorname{Log} y = 1$.
Dal sistema si ricava $x^2 = 4$, cioè $x = 2$ e $y = 100$, oppure $x = -2$ e $y = 1/100$.

3.

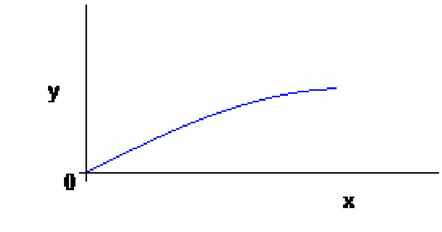
Per il C.E. studiamo l'equazione $\sqrt{|x^2-1|} = x \iff \begin{cases} |x^2-1| = x^2 \\ x \ge 0 \end{cases} \iff x = 1/\sqrt{2}$.

Dunque la funzione è definita per $x \ne 1/\sqrt{2}$.

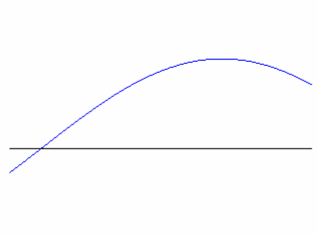
Per il segno studiamo la disequazione $\sqrt{|x^2-1|} > x \iff x < 0$ oppure $\begin{cases} |x^2-1| > x^2 \\ x \ge 0 \end{cases} \iff$

$x < 0$ oppure $\begin{cases} x^2 - 1 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x^2 - 1 < -x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1/\sqrt{2}$. Tenendo conto anche del segno del numeratore, si deduce che la funzione è positiva per $-1 < x < 1/\sqrt{2}$, nulla per $x = -1$.

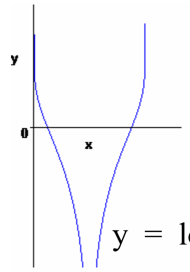
4.



$y = \text{sen}\,(x / 2)$

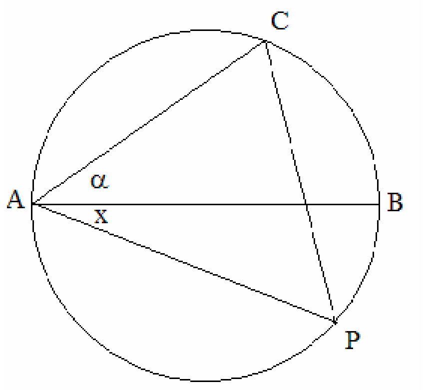


$y = \text{sen}\,(x - \pi/4)$



$y = \log|\log \text{sen}\, x|$

5.



$0 < x < \pi/2$

AP = 2 cos x (triangolo rettangolo ABP)
8/5 = 2 cos α (triangolo rettangolo ABC) cioè
cos α = 4/5 , sen α = 3/5 .

Applichiamo Carnot al triangolo APC :

$PC^2 = 4\cos^2 x + 64/25 - 32 \cos x \cos(x + \alpha) / 5 = 4\cos^2 x + 64/25 - 128\cos^2 x / 25 + 96\,\text{sen}\,x \cos x / 25 = 4\cos^2 x + 64\cos^2 x / 25 + 64\,\text{sen}^2 x / 25 - 128\cos^2 x / 25 + 96\,\text{sen}\,x \cos x / 25 = 6 \cos x / 5 + 8\,\text{sen}\,x / 5$.

Completando i calcoli, si arriva all'equazione $4\cos x + 2\,\text{sen}\,x = 3\sqrt{2}$. Si risolve studiando il sistema : $X^2 + Y^2 = 1$, $4X + 2Y = 3\sqrt{2}$.
Eliminando Y, si trova l'equazione $10X^2 - 12\sqrt{2}X + 7 = 0$, che fornisce $X = 7\sqrt{2}/10$ oppure $X = \sqrt{2}/2$. Dunque $x = \arccos 7\sqrt{2}/10$ oppure $x = \pi/4$.