## 5 Limiti di una funzione

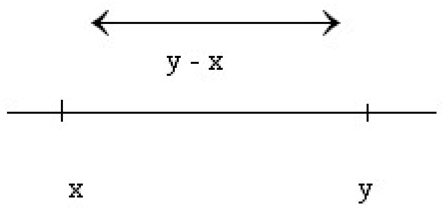
### Intorni nella retta reale

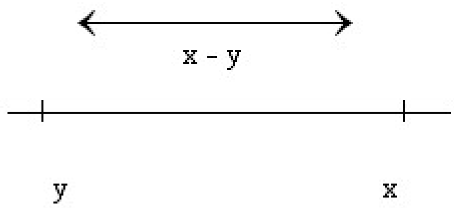
Ricordiamo la definizione di valore assoluto | x | di un numero reale x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

La **distanza** tra due numeri reali x, y, cioè la lunghezza del segmento che ha questi due punti per estremi, è data da:

d (x, y) = | x - y |.




in entrambi i casi la distanza si può scrivere | x - y |

Le proprietà del valore assoluto permettono di verificare naturali proprietà della distanza:

| | |
|---|---|
| d (x, y) $\geq$ 0 | positività |
| d (x, y) = 0 $\Leftrightarrow$ x = y | annullamento |
| d (x, y) = d (y, x) | simmetria |
| d (x, y) $\leq$ d (x, z) + d (y, z) | proprietà triangolare |

Verifica della **proprietà triangolare** :

$$| x - y | \leq | x - z | + | z - y |$$

Posto a = x - z, b = z - y, possiamo riscrivere la disuguaglianza nella forma

$$| a + b | \leq | a | + | b |.$$

Dato che ambo i membri sono positivi, possiamo elevare al quadrato.

$$a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2|a||b|$$

cioè

$$a b \leq | a | | b |$$

ovvero

$$a b \leq | a b |$$

che è ovvia.

☑

Dati un punto $x_0$ ed un numero $r > 0$, si definisce **intorno** di centro $x_0$ e raggio r l'insieme

$$U(x_0, \varepsilon) = \{ x \in R : d(x, x_0) < r \} = \{ x \in R : |x - x_0| < r \}$$

cioè l'intervallo

$$( x_0 - r , x_0 + r ) .$$

In molti casi non è necessario indicare esplicitamente qual è il raggio dell'intorno considerato; parleremo allora genericamente di intorno U del punto. Più in generale potremmo parlare di intorno di $x_0$ come di un intervallo che contiene un intorno di centro il punto.

**Retta reale estesa**

L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ ottenuto aggiungendo ad **R** due nuovi elementi, indicati con **- ∞** , **+ ∞,** prende il nome di **sistema esteso (o ampliato) dei numeri reali**; parleremo anche di **retta reale estesa (o ampliata).**

Chiameremo intorni di + ∞ o di - ∞ tutti gli insiemi della forma

$$( M, +\infty ) \quad \text{o} \quad ( -\infty, -M ) \quad , \quad \text{con } M \in \mathbf{R}^{+}.$$

In particolare questi intorni sono sottoinsiemi della retta reale **R** e dunque **non** contengono né + ∞ né - ∞.

La seguente definizione sarà fondamentale nella teoria dei limiti di una funzione:

<u>Definizione</u>

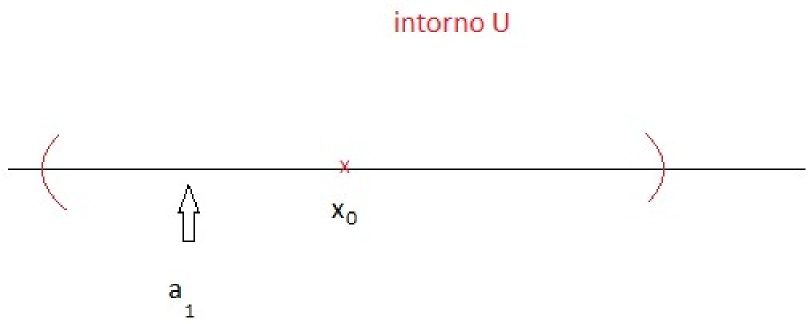
Sia A un insieme (non vuoto) di numeri reali e sia $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ .
Il punto $x_0$ si dice **di accumulazione** per A se:

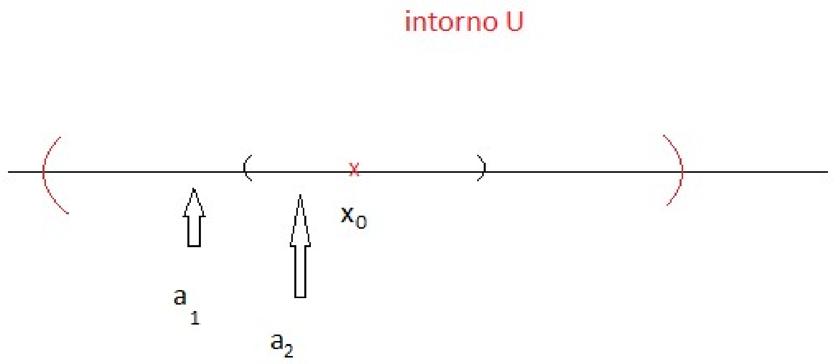
$$\forall\, U(x_0) \quad \exists\; \overline{x} \in A \cap U(x_0) - \{ x_0 \}$$

cioè se in ogni intorno di $x_0$ cade almeno un punto di A <u>diverso</u> da $x_0$ .

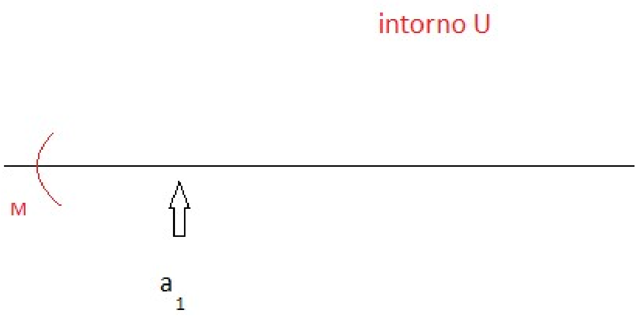
Non è difficile provare che in ogni intorno del punto di accumulazione in realtà cadono <u>infiniti punti di A</u>.
Vedi figure successive : le prime due per il caso $x_0$ reale, le seconde due per $x_0 = +\infty$.

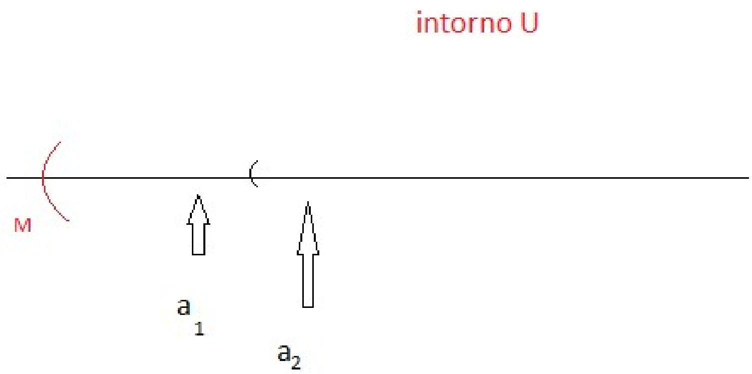
( i )


intorno U
x
$x_0$
$a_1$


intorno U
x
$x_0$
$a_1$
$a_2$

( ii )


intorno U
M
$a_1$


intorno U
M
$a_1$
$a_2$

Un punto $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ può dunque essere equivalentemente definito di accumulazione per A se in ogni suo intorno cadono infiniti punti di A.

Osservazione

Sottolineiamo che nella definizione di punto di accumulazione $x_0$ può essere un numero reale oppure $\pm\infty$, mentre A è **sempre** un insieme di numeri reali.
Nel caso in cui il punto di accumulazione $x_0$ sia un numero reale, può appartenere o meno ad A.

Esempio 1

Se A è un intervallo , i punti di accumulazione sono tutti i punti di A compresi gli estremi . Questo vale anche nel caso in cui gli estremi sono $\pm\infty$. Il risultato non dipende dal fatto che questi estremi appartengano o no all'intervallo.
In particolare , se A = R i punti di accumulazione sono tutti i punti della retta reale estesa.

Esempio 2

A = **Q**

Anche in questo caso i punti di accumulazione sono tutti i punti della retta reale estesa.

Esempio 3

A = **N**

L'unico punto di accumulazione è $+\infty$.

Esempio 4

$A = \{ 1/n,\ n \in \mathbf{N} \} = \{ 1,\ 1/2, 1/3, 1/4, \ldots \}$

L'unico punto di applicazione è 0

Esercizio

Provare che $+\infty$ è di accumulazione per A $\leftrightarrow$ sup A = $+\infty$.

**Limiti di una funzione: definizione generale**

Il concetto di **limite** di una funzione permette di descrivere il comportamento della funzione nei punti vicini ad un assegnato $x_0$ nella retta reale estesa. Questo concetto è generalmente distinto dal valore della funzione nel punto $x_0$, anzi $f(x_0)$ può anche non esistere (e sicuramente non esiste se $x_0 = \pm\infty$).

Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}}$$

definita per $x > 1$. Per valutare il valore della funzione in un punto qualunque del dominio, basta sostituire questo valore al posto di x nell'espressione analitica che definisce la funzione ed eseguire i relativi calcoli. Possiamo però anche chiederci qual è il comportamento della funzione "vicino al punto 1", che non sta nel dominio, ma ne è un punto di accumulazione. Altrettanto senso ha chiederci il comportamento asintotico della funzione , cioè "per valori molto grandi" di x, ovvero in un intorno di $+\infty$ - dopo aver osservato che anche $+\infty$ è di accumulazione per il dominio. Non ha invece alcun senso chiederci il comportamento ad esempio nel punto -1 (che non appartiene al dominio) o nei "punti vicini" a -1 (che non è di accumulazione per il dominio).

Siano assegnati:

una funzione f: A $\rightarrow$ **R**

un punto $x_0 \in \overline{R}$ di accumulazione per A

un valore $L \in \overline{R}$.

Vogliamo definire la nozione di limite e dire che per x che tende a $x_0$ la funzione tende ad L , scrivendo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{o anche} \quad \text{per } x \to x_0 \quad f(x) \to L$$

per esprimere la seguente proprietà:

la funzione assume valori f ( x ) **arbitrariamente** vicini ad L per tutti i valori x che stanno nel dominio della funzione e sono **opportunamente** vicini ad $x_0$ , ma diversi da $x_0$.

Per esprimere la nozione di vicinanza, useremo il concetto di limite nel modo che segue:

fissato **arbitrariamente** un intorno U di L, è possibile trovare di conseguenza un intorno V di $x_0$ tale che per tutte le x del dominio A che cadono nell'intorno V - escluso al più $x_0$ - i valori f ( x ) assunti dalla funzione cadono nell'intorno U fissato.

In simboli:

$$\forall U(L),\ \exists V(x_0): \forall x \in A \cap V(x_0) - \{x_0\},\ f(x) \in U(L)$$

<u>Osservazione 1</u>

Il fatto di aver tolto dall'intersezione $A \cap V(x_0)$ il punto $x_0$ realizza quanto detto nella premessa: l'esistenza ed eventualmente il valore della funzione in $x_0$ non

svolgono alcun ruolo nella definizione di limite. Ovviamente se $x_0$ è $\pm\infty$ e dunque non appartiene ad A, togliere $x_0$ da $A \cap V$ è del tutto superfluo (dato che in questa intersezione $x_0$ sicuramente non c'è).
Le funzioni :

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

hanno lo stesso comportamento per $x \to 1$.

<u>Osservazione 2</u>

Poiché $x_0$ è un punto di accumulazione per A, l'insieme $A \cap V(x_0) - \{x_0\}$ non solo non è vuoto, ma addirittura contiene infiniti punti.

**Primi teoremi legati alla definizione di limite**

- **Unicità**

  **Se per $x \to x_0$ una funzione ha limite, questo è unico.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \, , \; \lim_{x \to x_0} f(x) = M \quad \Rightarrow \quad L = M$$

- **Restrizioni**

  **Sia B un sottoinsieme del dominio A di una funzione f e sia $x_0$ un punto di accumulazione per entrambi gli insiemi.**
  **Allora:**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x) = L \, .$$

In altre parole, restringendo il dominio della funzione ad un insieme che ha ancora $x_0$ come punto di accumulazione, il limite non cambia.

Il risultato è utile per stabilire che un dato limite NON esiste.
Ad esempio:

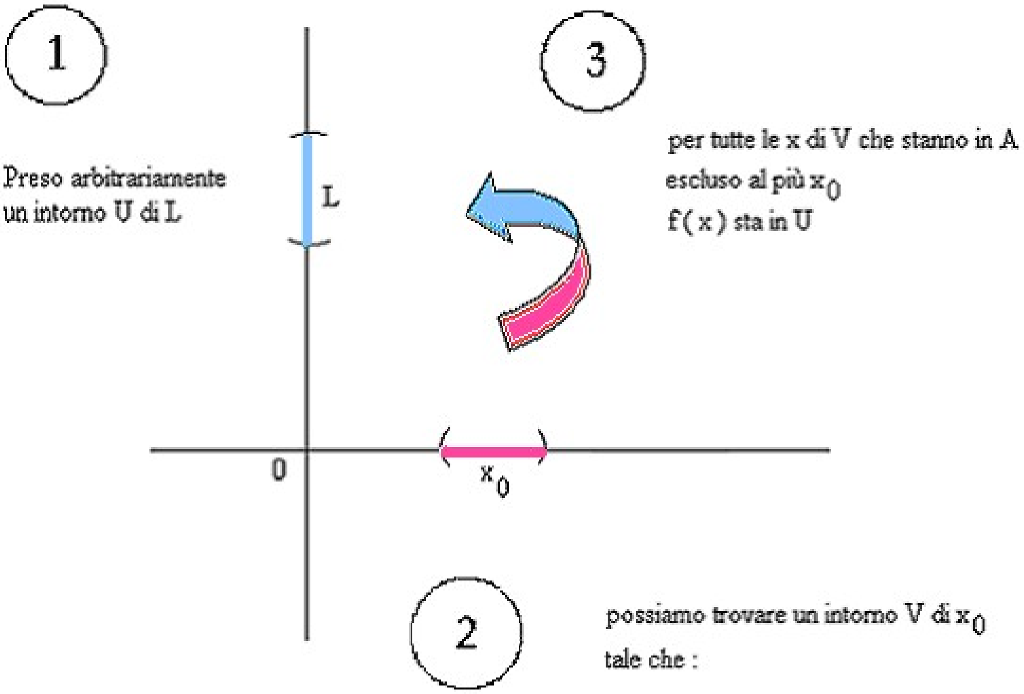
$$\lim_{x \to 0_0} 1/x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Se troviamo due restrizioni con lo stesso limite, questo in generale non basta a garantire l'esistenza del limite ( ci dice soltanto che se il limite esiste, deve avere questo valore).
Un caso in cui lo stesso comportamento su due restrizioni basta a garantire l'esistenza del limite: limite destro e limite sinistro.

**Limiti di una funzione: il caso $x_0 \in R$ , $L \in R$**
**Funzioni continue in un punto**



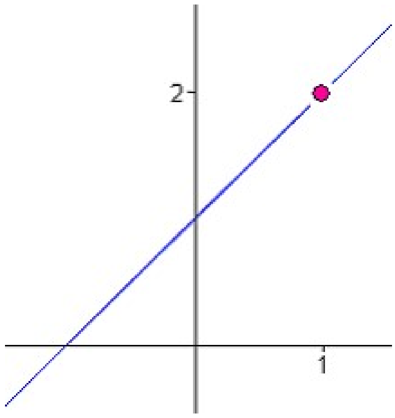

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Fissato $x_0$, il valore di $\delta$ dipende da $\varepsilon$, cioè varia al suo variare: quanto più piccolo è $\varepsilon$ ( cioè quanto più vicini ad L vogliamo che siano i valori f ( x ) ), tanto più piccolo dovrà essere $\delta$ (cioè tanto più vicini ad $x_0$ devono essere scelti i valori di x ).

Esempio 1

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad , \quad x \in R - \{1\}$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$




La funzione non è definita per x = 1, dunque non ha senso calcolare f (1).
Però 1 è punto di accumulazione per il dominio della funzione e dunque ha invece senso calcolare il limite per $x \to 1$. Facciamo vedere che questo limite vale 2, verificando che, fissato $\varepsilon > 0$, la disequazione

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

è soddisfatta da ogni x di un opportuno intervallo $(1 - \delta, 1 + \delta)$, escluso 1.

Poiché per $x \neq 1$ vale l'uguaglianza

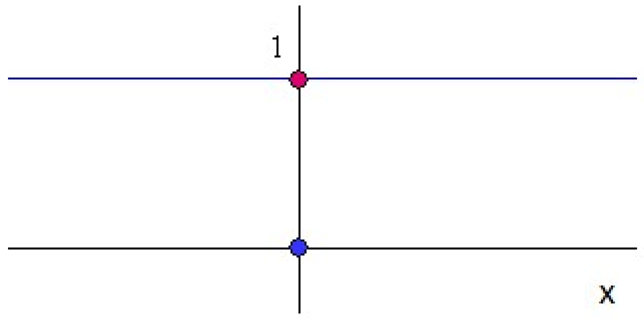
$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

la disequazione da studiare diventa $| x - 1 | < \varepsilon$ cioè $1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$.
Basta dunque prendere $\delta = \varepsilon$ perché la definizione di limite sia verificata.
In questo esempio $f(x_0)$ non esiste, mentre esiste il limite per $x \to x_0$.

Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$




La funzione è definita per x = 0 e risulta f (0) = 0; facciamo vedere che il limite per $x \to 0$ esiste e vale 1, provando che la disequazione | f (x) - 1 | < $\varepsilon$ è verificata dalle x tali che 0 < | x | < $\delta$, per un opportuno $\delta$, cioè dalle x tali che - $\delta$ < x < $\delta$ e $x \neq 0$.

Ma per x ≠ 0, f (x) = 1 e dunque la disequazione da studiare diventa 0 < $\varepsilon$, che è sempre verificata. In altre parole, possiamo scegliere $\delta$ > 0 in maniera del tutto arbitraria (e dunque questo è un caso in cui $\delta$ non dipende da $\varepsilon$).
In questo esempio esistono sia f ( $x_0$ ) che il limite per $x \to x_0$, ma i due valori sono diversi.

Esempio 3

$$f(x) = \frac{2x+7}{x+2} \quad , \quad x \in R - \{-2\}$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

La funzione è definita per x = 1 con valore 3; facciamo vedere che il suo limite per $x \to 1$ esiste e vale anch'esso 3.
Dobbiamo studiare la disequazione

$$\left| \frac{2x+7}{x+2} - 3 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{1-x}{x+2} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{1-x}{x+2} < \varepsilon$$

Non ci interessa trovarne tutte le soluzioni, ma solo verificare che tra queste ci sono in particolare i punti di un intorno di 1, escluso al più 1 ( in realtà stavolta il valore 1 è compreso, come si verifica immediatamente). Poiché ci interessa trovare le soluzioni in un intorno di 1, possiamo dunque supporre $x > -2$, in modo da rendere positivo il denominatore ( e anche il numeratore ) e riscrivere

$$-\varepsilon ( x + 2 ) < 1 - x < \varepsilon ( x + 2 )$$

cioè

$$\begin{cases} -\varepsilon x - 2\varepsilon < 1 - x \\ 1 - x < \varepsilon x + 2\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \varepsilon) x < 1 + 2\varepsilon \\ (1 + \varepsilon) x > 1 - 2\varepsilon \end{cases}$$

Possiamo supporre $\varepsilon < 1$ ( se la definizione di limite è verificata per i valori piccoli di $\varepsilon$, lo è a più forte ragione per quelli grandi ).

$$\frac{1 - 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} < x < \frac{2 - \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

Se verifichiamo che

$$\frac{1 - 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} < 1 < \frac{2 - \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

abbiamo trovato l'insieme delle soluzioni contiene un intervallo che ha 1 come punto interno; di conseguenza l'intervallo contiene in particolare un intorno di 1, che è quanto volevamo dimostrare. La verifica è immediata. Si osservi come l'intervallo che troviamo dipende da $\varepsilon$.

Osservazione

Nella verifica di un limite :

- non ci interessa trovare tutte le soluzioni della disequazione $| f ( x ) - L | < \varepsilon$, ma solo provare che tra queste in particolare ci sono i punti di A che stanno in un intorno di $x_0$ , $x_0$ al più escluso; diremo che studiamo la disequazione localmente

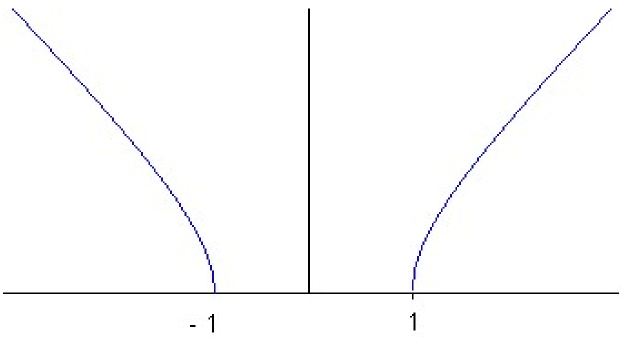
- non ci interessa studiare la disequazione per tutti i valori di $\varepsilon > 0$; se questo facilita i calcoli, possiamo supporre $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ opportuno ( se la disequazione è verificata localmente per valori piccoli di $\varepsilon$ , a più forte ragione lo è per valori più grandi)

- dato che cerchiamo soluzioni locali, possiamo limitare fin dall'inizio i valori di x. Per esempio, se abbiamo un limite per $x \to 1$, possiamo supporre $x > 0$ se questo facilita i calcoli. Sempre nel caso esaminato, non possiamo invece supporre $x < 0$ oppure $x > 2$ , anche se una o l'altra di queste restrizioni fosse particolarmente comoda per i calcoli.

Esempio 4

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$




La funzione è definita per $x = 1$ con valore 0; facciamo vedere che anche il suo limite per $x \to 1$ vale 0.
In questo caso x può avvicinarsi a 1 solo da destra, cioè per valori più grandi di 1 ( in questo caso si parla di limite da destra ) ; nella definizione di limite, quando intersechiamo un intorno di 1 (che è un intervallo della forma $(1-\delta, 1+\delta)$) con il dominio A, troviamo l'insieme $[1, 1+\delta)$, che chiamiamo intorno destro di 1.
Dobbiamo dunque verificare che la disequazione

$$\left| \sqrt{x^2 - 1} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 1} < \varepsilon$$

è soddisfatta dalle x di un intervallo (1, 1 + $\delta$ ) con $\delta > 0$ opportuno.
Supponendo dunque x > 1, risolviamo:

$$\sqrt{x^2 - 1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 < \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 1 + \varepsilon^2;$$

la disequazione è verificata per

$$1 < x < \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

cioè appunto in un intorno destro di 1, con $\delta = \sqrt{1 + \varepsilon^2} - 1$.
Anche in questo caso osserviamo la dipendenza di ô da ε.

<u>Esercizi</u> : verificare i seguenti limiti, facendo uso della definizione

$$\lim_{x \to e} \log \frac{e}{\log x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \log \frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1 + 2x} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$$

<u>Definizione</u>

Una funzione f (x) si dice **continua** in un punto $x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La definizione richiede che:

- la funzione sia definita per $x = x_0$
- esista finito il limite per $x \to x_0$
- il valore della funzione e il limite coincidano.

Un risultato fondamentale afferma che <u>le funzioni elementari ( cioè quelle che hanno un'espressione analitica ) sono continue in tutti i punti del loro dominio di definizione.</u>

Stante questo risultato, le verifiche fatte negli esempi 3. e 4. diventano superflue: le funzioni elementari

$$\frac{2x+7}{x+2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2 - 1}$$

sono continue nel loro dominio, in particolare per $x = 1$; dunque il loro limite per $x \to 1$ coincide con il valore per $x = 1$.
Per la prima di queste due funzioni ha senso calcolare il limite per x che tende ad un qualunque punto della retta reale ampliata**.** Di tutti i possibili limiti gli unici non banali sono quelli per $x \to \pm \infty$ e per $x \to -2$; in tutti gli altri punti la funzione è continua e dunque il calcolo del limite diventa un'operazione banale quanto superflua, confondendosi con il calcolo del valore $f(x_0)$ della funzione nel punto considerato.
Per la seconda funzione hanno senso i limiti per x che tende ad un qualunque punto di $[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$; gli unici limiti non banali sono quelli per $x \to \pm \infty$.

**Ancora sulle funzioni elementari**

Le funzioni elementari sono quelle che si possono esprimere in forma analitica.
Possiamo dare una definizione più precisa nel seguente modo:
si dicono elementari le funzioni

$$1 \quad x \quad e^x \quad \text{sen}x$$

e tutte quelle che se ne possono dedurre per via algebrica, cioè mediante le operazioni di

somma
valore assoluto
prodotto per una costante
prodotto
rapporto
composizione
inversione.

Ad esempio, sono dunque elementari le funzioni :

$P(x)$ polinomi

$P(x) / Q(x)$ rapporto tra polinomi ovvero funzioni razionali

$\sqrt[n]{x}$ radici

$\log x$

$a^x = e^{x \log a}$

$\log_a x$

$\cos x = \mathrm{sen}(x + \pi / 2)$

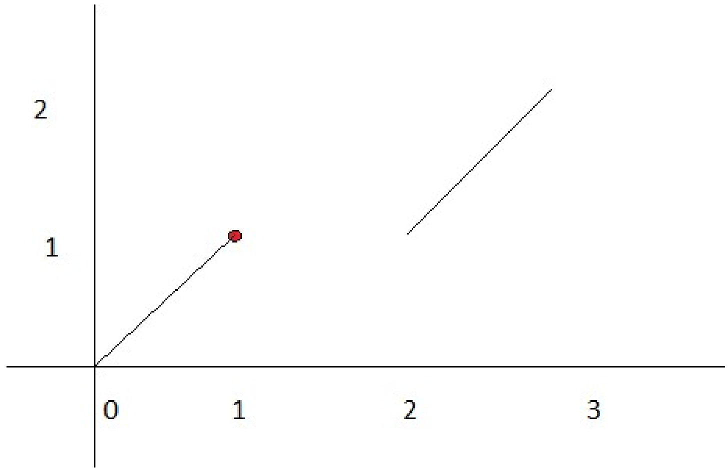
$\mathrm{tg}x$

$\mathrm{arcsen}x$ , $\arccos x$ , $\mathrm{arctg}\, x$

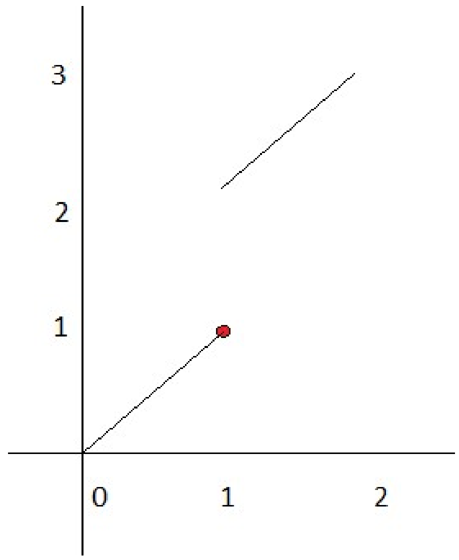
Per dimostrarne la continuità nel loro campo di esistenza :

- si dimostra direttamente per le funzioni base
- si dimostra che le operazioni algebriche conservano la continuità ( nel senso che, ad esempio, la somma di funzioni continue è ancora una funzione continua )

Il discorso è un po' più delicato per quanto riguarda l'inversione; non è detto che l'inversa di una funzione continua sia anch'essa continua:




$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$




$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & 0 \le y < 1 \\ y+1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

La funzione f è continua in tutti i punti del CE ( che non è un intervallo ) ; l'inversa è discontinua nel punto 1.

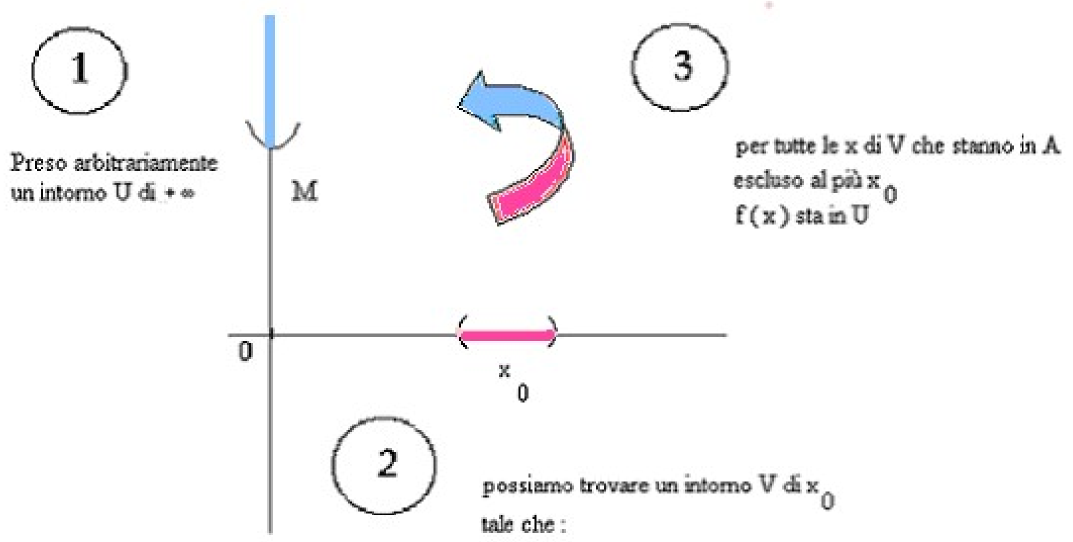
Si dimostra però che per una funzione continua in tutti i punti di un intervallo e invertibile, l'inversa è continua nel suo CE che è anch'esso un intervallo.

Così ad esempio, la funzione arcsenx è continua in tutto il CE che è [-1 , 1 ] , in quanto inverte la funzione senx ristretta all'intervallo [ -π/2 , π/2 ] .

**Limiti di una funzione: il caso $x_0 \in R$ , $L = \pm\infty$**
**Asintoti verticali**

Esaminiamo per primo il caso L = + ∞.

Preso un qualunque intorno di +∞ sull'asse delle y (cioè una qualunque semiretta ( M, + ∞) ), in corrispondenza deve esistere un intorno di $x_0$ sull'asse delle x (cioè un intervallo ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ ) tale che per tutte le x del dominio che stanno in questo intervallo - escluso al più $x_0$ - i valori della funzione cadono nella semiretta scelta, cioè f ( x ) diventa più grande di M .



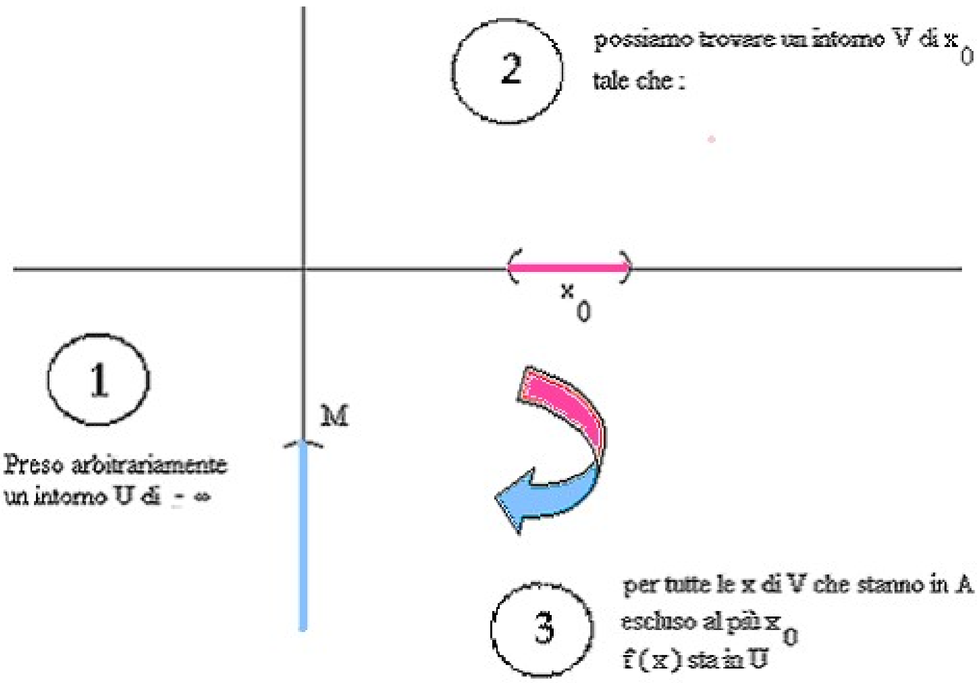

In simboli:

$$\forall M > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A \quad 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > M$$

Abbiamo preso M > 0 perché se la proposizione è verificata a partire dalle semirette ( M, + ∞ ) con M > 0, a più forte ragione è verificata a partire dalle altre.

In maniera analoga si interpreta il caso L = - ∞.

Preso un qualunque intorno di - ∞ sull'asse delle y, cioè una qualunque semiretta ( - ∞, M ), in corrispondenza deve esistere un intorno di $x_0$ sull'asse delle x , cioè un intervallo ( $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ ), tale che per tutte le x del dominio che stanno in questo intervallo - escluso al più $x_0$ - i valori della funzione cadono nella semiretta scelta ( cioè i valori f ( x ) diventano più piccoli di M).




In simboli:

$$\forall M > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < -M$$

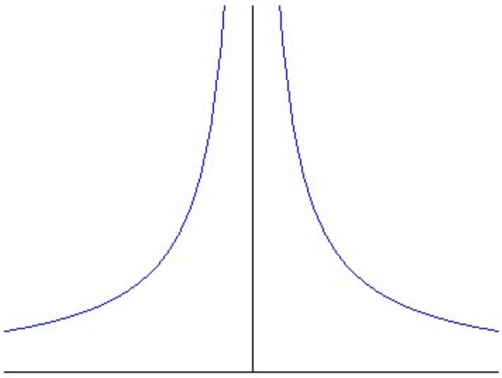
( Basta considerare le semirette ( - ∞, - M ) con M positivo ).

In entrambi i casi diremo che la retta verticale di equazione $x = x_0$ è un asintoto per la funzione (**asintoto verticale)**.

Esempio 1

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad , \quad x \in R - \{0\}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$



Dobbiamo verificare che, fissato M > 0, la disequazione $1 / |x| > M$ è soddisfatta dalle x tali che $0 < |x| < \delta$ per un opportuno $\delta > 0$. Poiché la disequazione proposta si può riscrivere nella forma $|x| < 1 / M$, basterà prendere $\delta = 1 / M$.

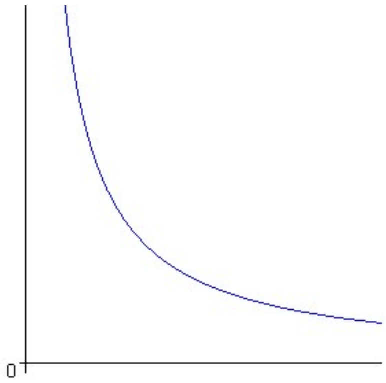
Esempio 2

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Comunemente si scrive :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty .$$

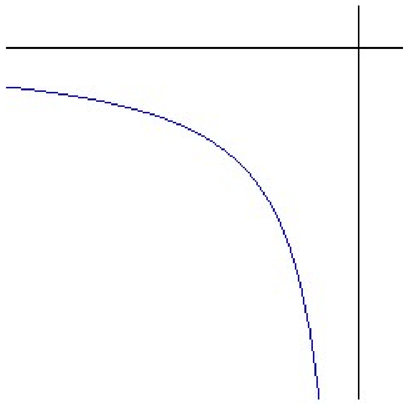



Dobbiamo verificare che, fissato M > 0, la disequazione 1 / x > M è soddisfatta dalle x in un intorno destro di 0, cioè tali che 0 < x < $\delta$, per un opportuno $\delta$ > 0. Poiché la disequazione proposta si può riscrivere nella forma x < 1 / M, basterà prendere $\delta$ = 1 / M.

Esempio 3

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$\lim_{x \to 0} \; f(x) = -\infty .$$



Comunemente si scrive :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

Dobbiamo verificare che, fissato $M > 0$, la disequazione $1 / x < - M$ è soddisfatta in un intorno sinistro di 0, cioè dalle x tali che $- \delta < x < 0$, per un opportuno $\delta > 0$. Poiché la disequazione proposta si può riscrivere nella forma $x > - 1 / M$, basterà prendere $\delta = 1 / M$.

Esempio 4

$$f ( x ) = \log_a x \quad , \quad x \in ( 0 , + \infty )$$

$$\lim_{x \to 0} f ( x ) = \begin{cases} - \infty & \text{se } a > 1 \\ + \infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Verifichiamo il caso $a > 1$.

Fissato $M > 0$, dobbiamo far vedere che la disequazione $\log_a x < - M$ è soddisfatta dalle x tali che $0 < x < \delta$, per un opportuno $\delta > 0$. Ma la disequazione si può riscrivere nella forma $x < a^{-M}$ e dunque basta prendere $\delta = a^{-M}$.

Esercizi

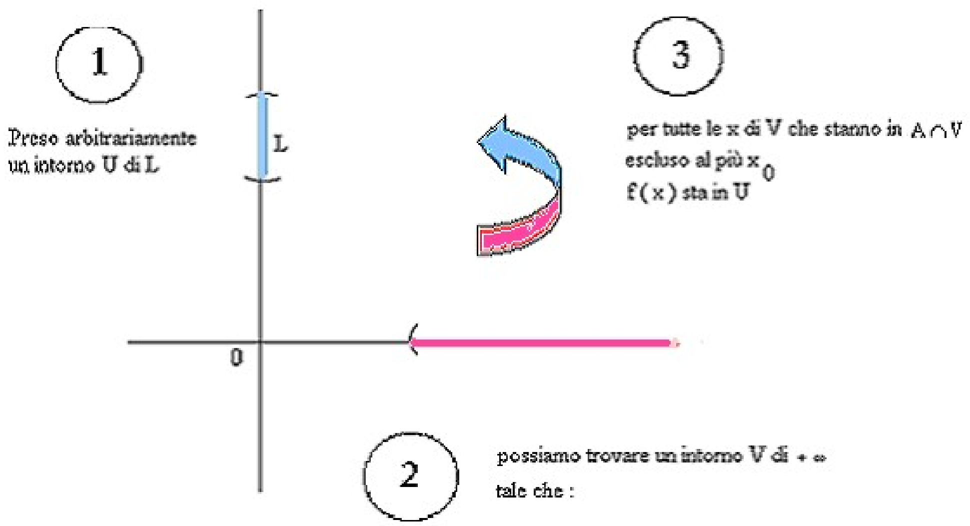
$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - x}{x^2} = + \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} = + \infty$$

## 3.4 **Limiti di una funzione: il caso $x_0 = \pm\infty$, $L \in R$ Asintoti orizzontali**

Esaminiamo per primo il caso $x_0 = +\infty$.

Preso un qualunque intorno di L sull'asse delle y ( cioè un qualunque intervallo ( $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$) ), in corrispondenza deve esistere un intorno di $+\infty$ sull'asse delle x (cioè una semiretta ( M, $+\infty$ ) ) tale che per tutte le x del dominio che stanno in questa semiretta, i valori f ( x ) della funzione cadono nell'intervallo scelto.




In simboli:

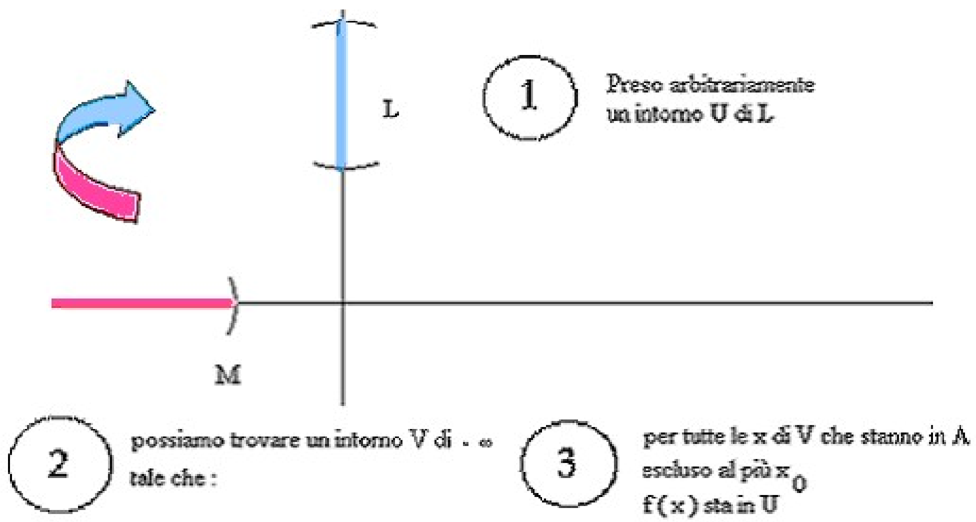
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \; : \; \forall x \in A \; , \; x > M \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \; : \; \forall x \in A \; , \; x > M \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Il caso $x_0 = -\infty$ si interpreta in modo analogo.

Preso un qualunque intorno di L sull'asse delle y (cioè un qualunque intervallo ( $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$ ) ), in corrispondenza deve esistere un intorno di $-\infty$ sull'asse delle x ( cioè una semiretta ( $-\infty$, M ) ) tale che per tutte le x del dominio che stanno in questa semiretta, i valori f ( x ) della funzione cadono nell'intervallo scelto.




In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \; : \; \forall x \in A \; , \; x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \; : \; \forall x \in A \; , \; x < -M \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

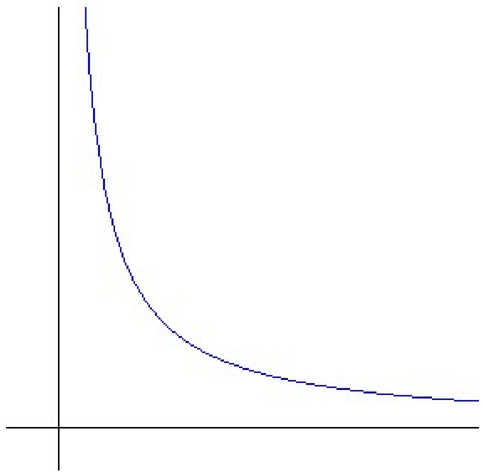
In entrambi i casi diremo che la retta orizzontale di equazione y = L è un asintoto per la funzione ( **asintoto orizzontale** ).

Esempio 1

f (x) = 1 / x , $x \in \mathbf{R} - \{ 0 \}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo far vedere che la disequazione | 1 / x | < $\varepsilon$ è verificata per ogni x > M, per M > 0 opportuno. Poiché possiamo supporre x > 0, la disequazione diventa 1 / x < $\varepsilon$, cioè x > 1 / $\varepsilon$. Basta dunque prendere M = 1 / $\varepsilon$ .



Osservazione

Il limite precedente assicura che la retta di equazione y = 0 (asse delle x) è asintoto orizzontale per la funzione f ( x ) = 1 / x quando $x \to +\infty$.
Questo risultato è coerente con il fatto che il grafico della funzione è un'iperbole equilatera riferita agli assi; sappiamo anche che $x \to +\infty$ l'iperbole si avvicina arbitrariamente all'asintoto, rimanendone al di sopra. Dal punto di vista algebrico, nella verifica del limite risulta **0 <** 1 / x < $\varepsilon$ per x > M. Questa precisazione nel comportamento della funzione può essere indicata con la notazione:

$$\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0^+$$

(parleremo di **limite per eccesso)**.

La retta y = 0 è asintoto per la funzione anche per $x \to -\infty$, ma stavolta il grafico della funzione si avvicina alla retta rimanendole al di sotto. Scriveremo allora

$$\lim_{x \to -\infty} 1/x = 0^-$$

(e parleremo di **limite per difetto)**.

Esempio 2

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+ \qquad \text{se } a > 1$$

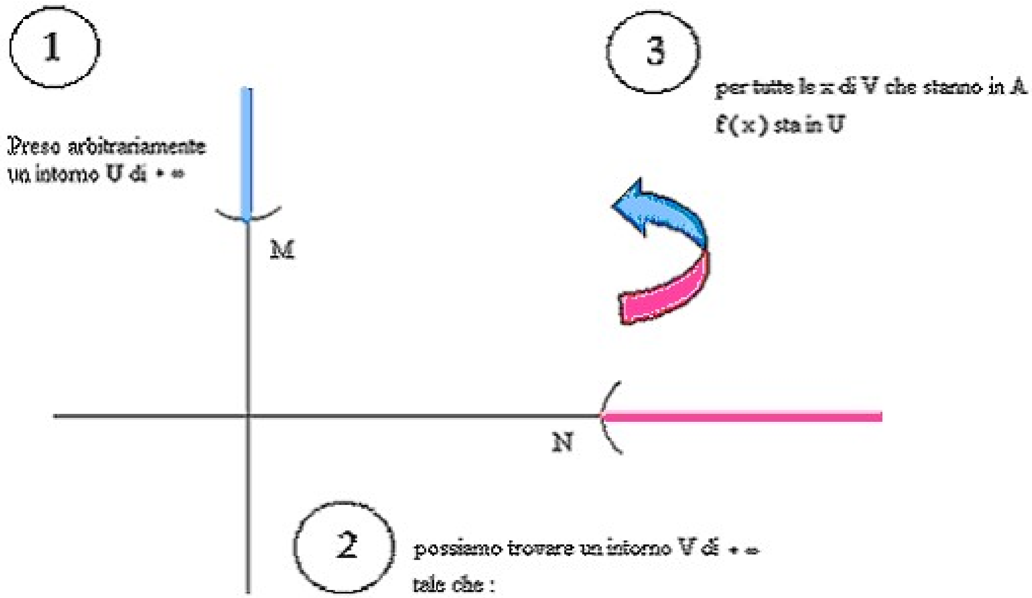
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+ \qquad \text{se } 0 < a < 1$$

Verifichiamo il primo limite; per l'altro si procede in modo analogo.
Occorre far vedere che risulta $a^x < \varepsilon$ per x < - M opportuno.
Poiché la disequazione equivale ad $x < \log_a \varepsilon$, basta prendere M = $\log_a \varepsilon$.

**Limiti di una funzione: il caso $x_0 = \pm\infty$ , $L = \pm\infty$**

Esaminiamo per primo il caso $x_0 = +\infty$ , $L = +\infty$.

Preso un qualunque intorno di $+\infty$ sull'asse delle y (cioè una qualunque semiretta della forma $(M, +\infty)$), in corrispondenza deve esistere un intorno di $+\infty$ sull'asse delle x (cioè una semiretta $(N, +\infty)$) tale che per tutte le x del dominio maggiori di N la funzione assume valori f (x) maggiori di M.




In simboli:

$$\forall M>0 \ , \ \exists N>0 \ : \ \forall \ x \in A \ , \ x > N \ \Rightarrow f(x) > M$$

In maniera analoga si interpretano gli altri casi:

- $x_0 = +\infty$ , $L = -\infty$

$$\forall M>0 \ , \ \exists N>0 \ : \ \forall \ x \in A \ , \ x > N \ \Rightarrow f(x) < -M$$

- $x_0 = -\infty \ , \quad L = +\infty$

$$\forall M > 0 \ , \ \exists N > 0 \ : \ \forall \ x \in A \ , \ x < -N \ \Rightarrow f(x) > M$$

- $x_0 = -\infty \ , \quad L = -\infty$

$$\forall M > 0 \ , \ \exists N > 0 \ : \ \forall \ x \in A \ , \ x < -N \ \Rightarrow f(x) < -M$$

L'interpretazione geometrica sulla falsariga del caso trattato è lasciata per esercizio.

Esempio 1

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Nel caso $a > 1$ dobbiamo far vedere che, fissato $M > 0$, risulta $\log_a x > M$ per tutte le $x > N$, per un opportuno $N > 0$.
Poiché la disequazione si può riscrivere nella forma equivalente $x > a^M$, basta prendere $N = a^M$.

Nel caso $0 < a < 1$ dobbiamo far vedere che, fissato $M > 0$, risulta $\log_a x < -M$
per tutte le $x > N$, per un opportuno $N > 0$.
Riscritta la disequazione nella forma equivalente $x > a^{-M}$, basta prendere $N = a^{-M}$.

Esempio 2

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad \text{se } a > 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \text{se } 0 < a < 1$$

Nel caso $a > 1$ dobbiamo far vedere che, fissato $M > 0$, risulta $a^x > M$ per tutte le $x > N$, per un opportuno $N > 0$.
Poiché la disequazione si può riscrivere nella forma equivalente $x > \log_a M$, basta prendere $N = \log_a M$.

Nel caso 0 < a < 1 dobbiamo invece far vedere che, fissato M > 0, risulta $a^x > M$ per tutte le x < - N, per un opportuno N > 0.
Riscritta la disequazione nella forma equivalente $x < \log_a M$, basta prendere $N = -\log_a M$.

Esempio 3

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 1} = +\infty$$

La funzione è definita in A = $(-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty)$ e dunque entrambi i limiti hanno senso.

Per verificare i risultati, dobbiamo far vedere che, fissato M > 0, la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} > M \iff x^2 - 2x - 1 > M^2 \iff x^2 - 2x - 1 - M^2 > 0$$

è verificata sia in un intorno di + ∞ che in un intorno di - ∞.
Infatti l'insieme delle soluzioni è dato da

$$(-\infty, 1-\sqrt{M^2+2}) \cup (1+\sqrt{M^2+2}, +\infty).$$

**Teoremi sui limiti**

- **Unicità**
- **Restrizioni**
- **Permanenza del segno**

**Se per $x \to x_0$ il limite di una funzione è diverso da 0, la funzione ha localmente lo stesso segno del limite (escluso al più nel punto $x_0$).**
Il termine localmente significa: <u>in tutti i punti del dominio della funzione che stanno in un intorno del punto considerato.</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists V(x_0) : \forall x \in A \cap V(x_0) - \{x_0\},\ f(x) > 0.$$

Ad esempio, faremo vedere che per $x \to +\infty$ si ha $x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \to +\infty$. Il teorema precedente assicura che la disequazione $x^3 - 3x^2 - 4x - 1 > 0$ è verificata <u>almeno</u> in un intorno di $+\infty$.

- **Passaggio al limite in una disequazione**

**Se per $x \to x_0$ la funzione f (x) ha limite L e se localmente risulta $f(x) > 0$, allora $L \geq 0$.**
**Alla stessa conclusione si arriva supponendo che localmente risulti $f(x) \geq 0$.**

$$\begin{cases} \exists V(x_0) : \forall x \in A \cap V - \{x_0\},\ f(x) > 0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = L \end{cases} \Rightarrow L \geq 0$$

Nel caso in cui sia $f(x) > 0$ localmente, il limite L non è necessariamente $> 0$ anch'esso, potendo invece essere $= 0$.
Ad esempio, $f(x) = 1/x$ definita per $x > 0$; il limite per $x \to +\infty$ vale 0.

- **Confronto**

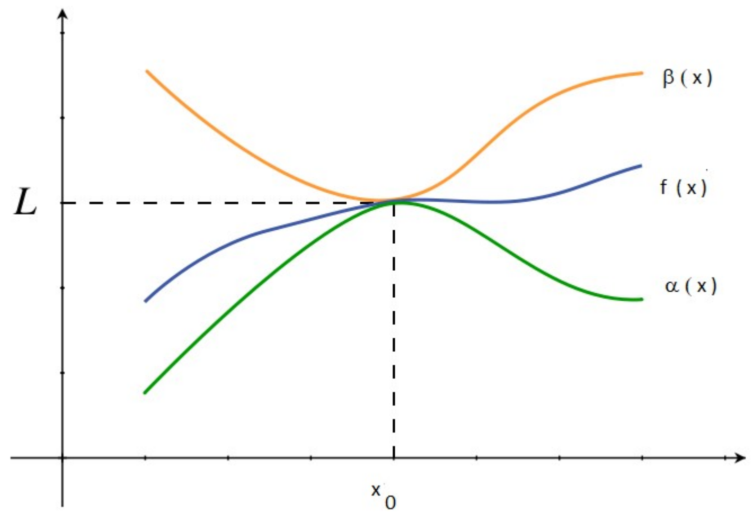
**Date tre funzioni $f(x), \alpha(x), \beta(x)$ tali che**

**( i )** <u>**localmente**</u> $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$

**( i i )** **per $x \to x_0$ risulta $\alpha(x), \beta(x) \to L \in R$;**

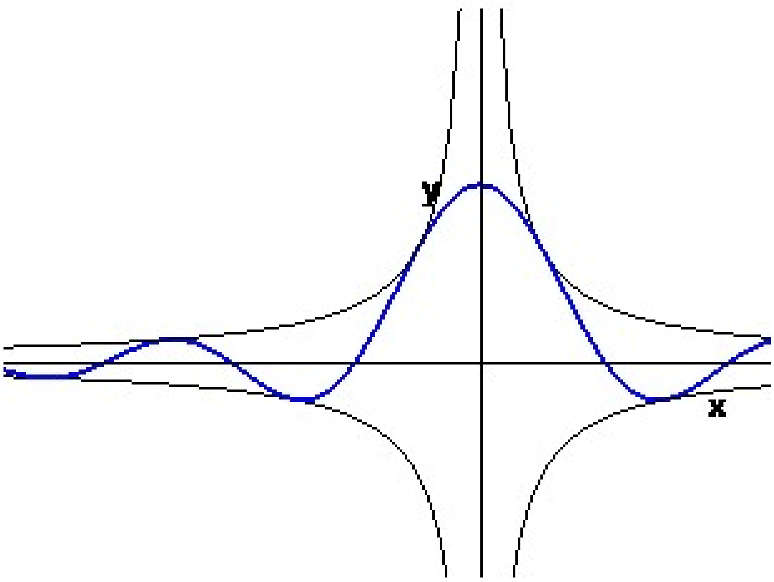
**allora per $x \to x_0$ risulta anche $f(x) \to L$.**

In altre parole, se nell'intorno di un punto $x_0$ ( escluso al più il punto ) riusciamo a minorare e a maggiorare la funzione f ( x ) con due funzioni che per $x \to x_0$ hanno lo stesso limite L, allora per $x \to x_0$ anche f ( x ) ha limite L.



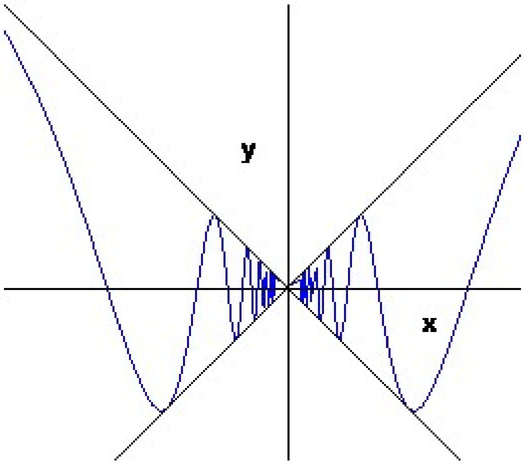

Esempio

Proviamo che $\lim_{x \to +\infty} \text{senx} / x = 0$.




- $-1 \leq \text{senx} \leq 1$ ( * )
- poiché il limite è fatto per $x \to +\infty$ , possiamo supporre $x > 0$
- dividendo per x i termini in ( * ) si ottiene $-1 / x \leq \text{senx} / x \leq 1 / x$
- poiché $\lim_{x \to +\infty} \pm 1 / x = 0$ , il risultato segue per confronto.

Analogamente $\lim_{x \to 0} x \,\text{sen} ( 1 / x ) = 0$.




- $-1 \leq \text{sen}(1/x) \leq 1 \quad (*)$
- la funzione è pari: possiamo considerare solo il limite per $x \to 0^+$, supponendo dunque $x > 0$
- moltiplicando per x i termini in ( * ), si ottiene $-x \leq x\,\text{sen}(1/x) \leq x$
- poiché $\lim_{x\to 0} \pm x = 0$, il risultato segue per confronto.

**Osservazione**
Il calcolo precedente si può generalizzare dicendo che il prodotto di una funzione infinitesima per una ( localmente ) limitata è infinitesimo.
Se:

**(i)** **per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to 0$**
**(ii)** **$g(x)$ è limitata in un intorno di $x_0$**

**allora per $x \to x_0$ risulta anche $f(x)\,g(x) \to 0$.**

**Osservazione**
Differenza tra funzione limitata e funzione dotata di limite.

- **Confronto ( II versione )**

**Date due funzioni $f(x)$, $\alpha(x)$ tali che**
**( i )** <u>**localmente**</u> **$f(x) \geq \alpha(x)$**
**( i i )** **per $x \to x_0$ risulta $\alpha(x) \to +\infty$;**
**allora per $x \to x_0$ risulta anche $f(x) \to +\infty$.**

**Date due funzioni $f(x)$, $\beta(x)$ tali che**
**( i )** <u>**localmente**</u> **$f(x) \leq \beta(x)$**
**( i i )** **per $x \to x_0$ risulta $\beta(x) \to -\infty$;**
**allora per $x \to x_0$ risulta anche $f(x) \to -\infty$.**