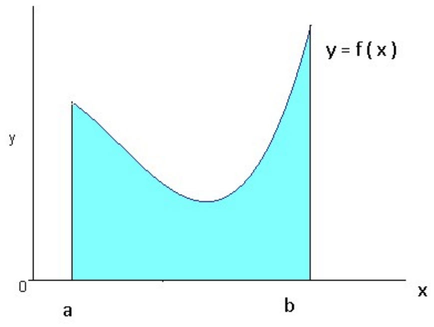
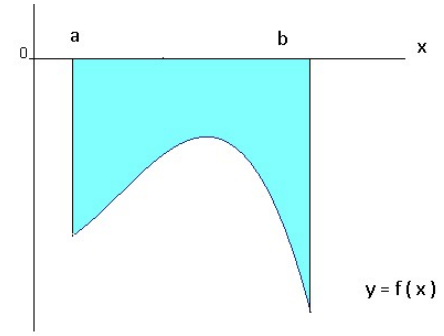
Applicazioni dell'integrale al calcolo di aree

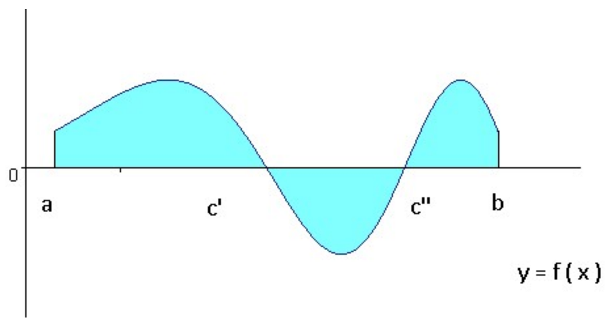


$$\text{area T} = \int_a^b f(x)\, dx$$



$$\text{area T} = -\int_a^b f(x)\, dx$$

La rotazione di 180° attorno all'asse delle x lascia invariata l'area e trasforma il dominio nel trapezoide generato dalla funzione positiva – f ; l'area è dunque l'integrale di – f , ovvero l'integrale di f cambiato di segno.



$$\text{area T} = \int_a^b \left| f(x) \right| dx$$

In pratica dobbiamo integrare f negli intervalli in cui è positiva , - f negli altri e poi sommare i contributi. <u>Riferendoci alla figura precedente</u>, avremo

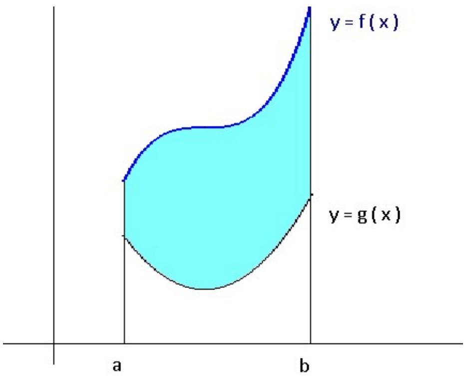
$$\int_a^{c'} f(x)\,dx - \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx + \int_{c''}^{b} f(x)\,dx$$

Siano f (x) , g (x) due funzioni integrabili in [a, b] tali che g (x) ≤ f (x).

Poniamo

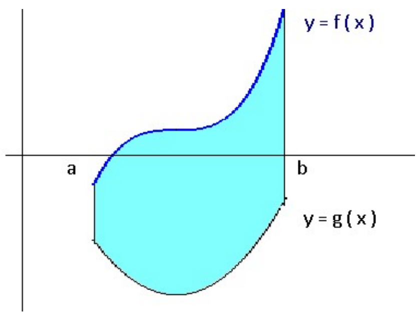
$$T = \{ (x, y) : x \in [a, b],\ g(x) \le y \le f(x) \}.$$

Una regione di questa forma si dice dominio **normale all'asse delle x.**



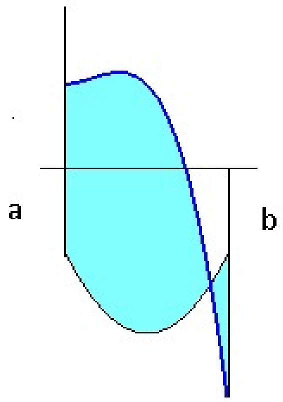
$$\text{area } T = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Il dominio è visto come differenza dei trapezoidi individuati dalle due funzioni.



$$\text{area } T = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

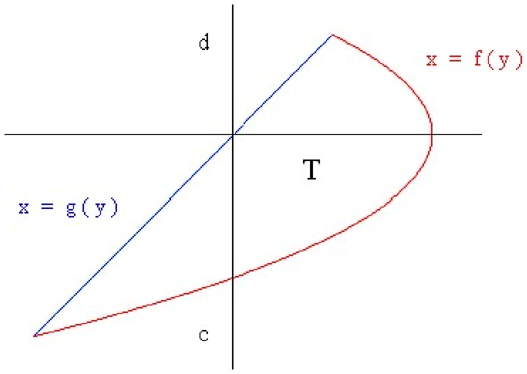
Il risultato non cambia anche se stavolta non abbiamo il grafico di due funzioni positive a delimitare il dominio. Poiché l'area non cambia per traslazioni, possiamo pensare di traslare il dominio verso l'alto in modo da posizionarlo nel semipiano delle y positive come nel caso precedente. La traslazione equivale a sostituire le funzioni f (x) e g (x) con f (x) + k e g (x) + k per un'opportuna costante positiva k. Applicando il risultato precedente, la costante non svolge alcun ruolo.



$$\text{area } T = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

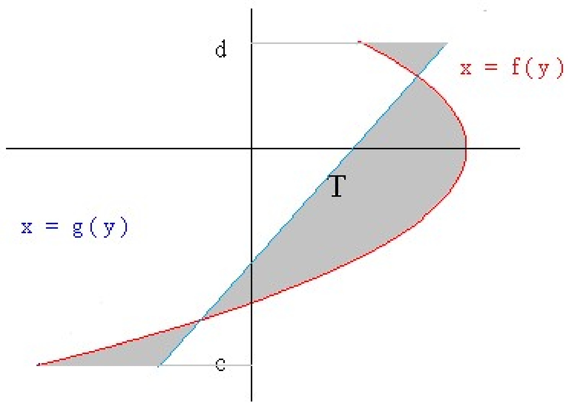
In pratica dovremo integrare la funzione f (x) – g (x) in ogni intervallo in cui questa è positiva, la funzione g (x) – f (x) negli altri e poi sommare i contributi.

Un dominio si dice **normale rispetto all'asse y** se è delimitato dai grafici di due funzioni della variabile y; scambiando il ruolo delle variabili e quindi calcolando un integrale nella y, si estende senza difficoltà il risultato precedentemente visto per i domini normali rispetto all'asse x.



$$\text{area T} = \int_c^d (f(y) - g(y))\, dy$$

In questo caso il grafico della funzione f (y) sta tutto a destra di quello della funzione g (y). Equivale al caso precedente in cui il grafico di f (x) sta tutto al di sopra di quello di g (x).

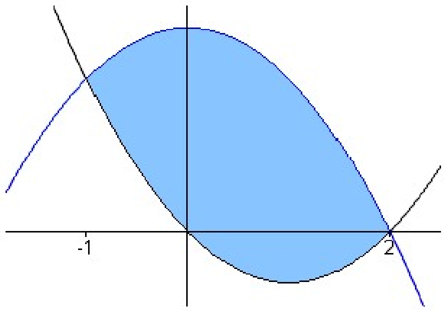


$$\text{area T} = \int_c^d \left| f(y) - g(y) \right| dy$$

In questo caso nessuna dei due grafici sta tutto a destra e l'altro tutto a sinistra. In pratica dobbiamo integrare f (y) – g (y) negli intervalli in cui è positiva, g (y) – f (y) negli altri e poi sommare i contributi.

Esempi

1. Area della regione di piano compresa tra le parabole $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$.

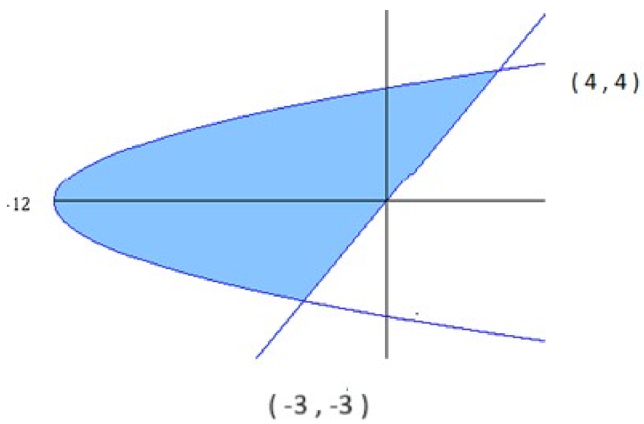


Le due curve si intersecano nei punti (-1, 3), (2, 0).

Poiché nell'intervallo [-1, 2] risulta $4 - x^2 \geq x^2 - 2x$, l'area è data dall'integrale

$$\int_{-1}^{2} ((4 - x^2) - (x^2 - 2x))\,dx = \int_{-1}^{2} (4 - 2x^2 + 2x)\,dx = \ldots.$$

2. Area della regione di piano compresa tra la parabola $x = y^2 - 12$ e la retta $y = x$.

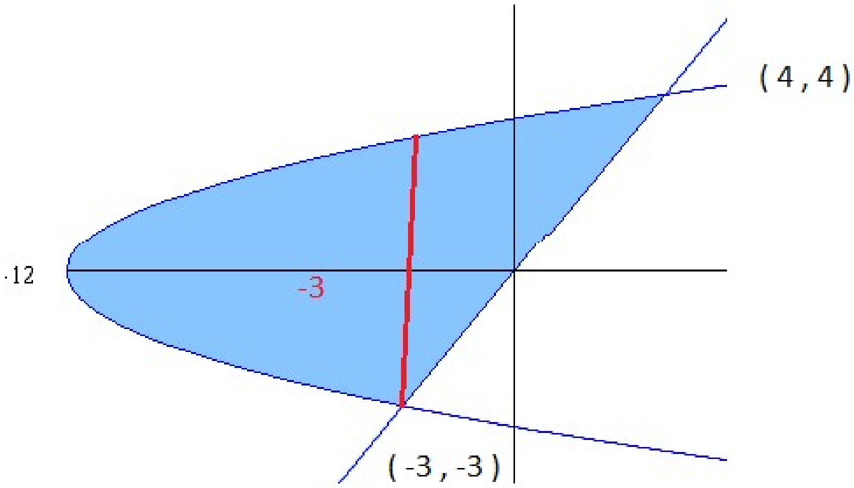


E' conveniente visualizzare la regione come delimitata dal grafico di due funzioni della variabile y.

Le due curve si intersecano nei punti (-3, -3), (4, 4). Inoltre, come è evidente nella figura, per $-3 \leq y \leq 4$ risulta $y^2 - 12 \leq y$. L'area è quindi data da:

$$\int_{-3}^{4} (y - (y^2 - 12))\, dy \;.\; = \ldots..$$

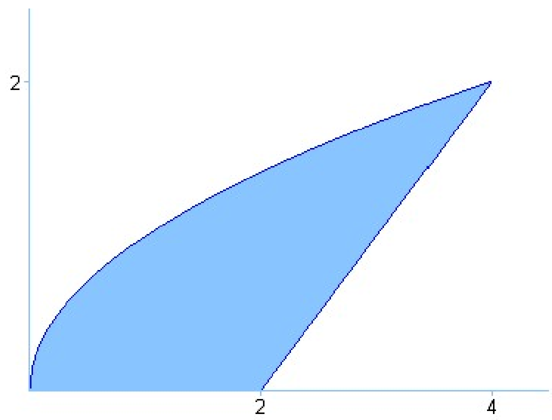
Se invece vogliamo vedere il dominio come normale rispetto all'asse x, lo possiamo spezzare in due parti come in figura (la linea rossa è quella che realizza la divisione).



La parabola sarà rappresentata da due funzioni : $y = \sqrt{x+12}$ oppure $y = -\sqrt{x+12}$ a seconda che ci interessi la parte al di sopra dell'asse delle x o quella al di sotto.

$$\int_{-12}^{-3} 2\sqrt{x+12}\, dx + \int_{-3}^{4} \left(\sqrt{x+12} - x\right) dx = \ldots..$$

3. Area della regione di piano compresa tra la parabola di equazione $x = y^2$, l'asse x e la retta $y = x - 2$.



Interpretando il dominio come normale rispetto all'asse x, si trova:

$$\int_0^2 \sqrt{x}\ dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\ dx .$$

Se invece lo vediamo come normale all'asse y, si ottiene:

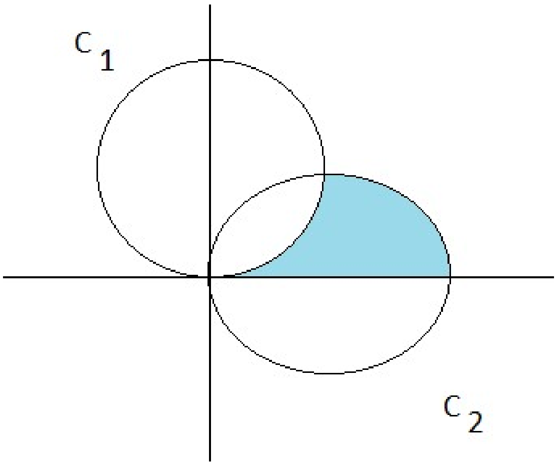
$$\int_0^2 (y + 2 - y^2)\ dy \ .$$

Allo stesso risultato possiamo arrivare anche per differenza, cioè calcolando l'area della regione compresa tra la parabola e l'asse delle x per $0 \leq x \leq 4$ e a questa togliendo l'area del triangolo di base 2 e altezza 2:

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ dx - 2 .$$

4.

Date le due circonferenze di raggio 1 e centri in (0 , 1) e in (1 , 0) , trovare l'area della regione colorata in figura.



$C_1 : x^2 + y^2 - 2y = 0$, $C_2 : x^2 + y^2 - 2x = 0$

Si intersecano nel punto (1 , 1) (oltre che nell'origine) .

Si può procedere in più modi.

(i) Dominio normale asse x

Dobbiamo ricavare y dalle due equazioni.

Per C_1 : $y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$; la soluzione che ci interessa è quella con il segno –

Per C_2 : $y = \pm \sqrt{2x - x^2}$; la soluzione che ci interessa è quella con il segno +

$$\text{Area} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx + \int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\ dx = ...$$

(2) Dominio normale asse y

Dobbiamo ricavare x dalle due equazioni.

Per C_1 : $x = \pm \sqrt{2y - y^2}$; la soluzione che ci interessa è quella con il segno +

Per C_2 : $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$; la soluzione che ci interessa è quella con il segno +

$$\text{Area} = \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1 - y^2} - \sqrt{2y - y^2}\right) dy \quad .....$$

(3) Come differenza tra l’area del semicerchio e quella della parte racchiusa dalle due circonferenze.

L’area del semicerchio è π / 2.

Per l’area della parte in comune, vista come dominio normale all’asse delle x, dobbiamo ricavare y dalle due equazioni.

Per C_1 : $y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$; la soluzione che ci interessa è quella con il segno –

Per C_2 : $y = \pm \sqrt{2x - x^2}$; la soluzione che ci interessa è quella con il segno +

Area regione in comune = $\int_0^1 \left(\sqrt{2x - x^2} - 1 + \sqrt{1 - x^2} - \right) dx$ .....