

Equazioni a variabili separate

L'esempio più semplice di equazione differenziale non lineare è fornito dalle equazioni a variabili separate. Queste sono equazioni del primo ordine, esprimibili nella forma

$$y' = A(x) B(y)$$

in cui il secondo membro è il prodotto di un termine che dipende solo da x per uno che dipende solo da y ; nel seguito supporremo continue queste due funzioni, rispettivamente negli intervalli I_1 e I_2 .

Lo schema di risoluzione di un'equazione a variabili separate è il seguente:

- Si cercano le eventuali **soluzioni costanti**, annullando la funzione $B(y)$; infatti la funzione costante $y = k$ è una soluzione dell'equazione se e solo se $B(k) = 0$ per un certo valore di k .
- Restringiamo y ad un intervallo $J \subset I_2$ in cui è $B \neq 0$; se $y(x)$ è una soluzione dell'equazione a valori in questo intervallo

$$y'(x) = A(x) B(y(x))$$

dividiamo ambo i membri per $B(y)$:

$$\frac{y'(x)}{B(y(x))} = A(x) . \quad (*)$$

- Integriamo ambo i membri di $(*)$:

$$\int_0 \frac{y'(t)}{B(y(t))} dt = \int A(t) dt . \quad (**)$$

Nel primo integrale effettuiamo la sostituzione $y(t) = s$, $y'(t) dt = ds$; si ottiene:

$$\int \frac{ds}{B(s)} = \int A(t) dt .$$

- Calcoliamo i due integrali: se F è una primitiva di $1/B$ e G una primitiva di A , si arriva ad un risultato della forma:

$$F(y) = G(x) + c,$$

con c costante arbitraria. Questa equazione fornisce in forma **implicita** l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale.

- Abbiamo supposto $B(y) \neq 0$ nell'intervallo J . Poiché $B(y)$ è continua, deve avere segno costante in tutto l'intervallo e dunque lo stesso accade per $F'(y) = 1/B(y)$. Questo assicura che $F(y)$ è invertibile; possiamo dunque esplicitare le soluzioni scrivendo

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + c) . \quad (***)$$

Questo procedimento in linea teorica permette di ricavare l'insieme delle soluzioni (o integrale generale) in forma **esplicita**; all'atto pratico, per poter realizzare questo obiettivo, occorre poter calcolare le primitive F e G in forma elementare e poter scrivere esplicitamente la funzione inversa F^{-1} .

In questo insieme di soluzioni non sono comprese le eventuali soluzioni costanti che devono essere calcolate separatamente, come abbiamo visto .

Nella pratica, dopo aver trovato le condizioni di esistenza dell'equazione (cioè i campi di esistenza di $A(x)$ e di $B(y)$) e dopo aver controllato l'eventuale esistenza di soluzioni costanti,

possiamo separare le variabili e integrare; in quest'ultimo passaggio possiamo direttamente scrivere (**) nella forma

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x) dx .$$

Calcolando gli integrali indefiniti, si ritrovano le soluzioni in forma implicita $F(y) = G(x) + c$ e successivamente nella forma esplicita (***).

Perché abbia senso quest'ultimo passaggio , x deve essere tale che $G(x) + c \in \text{Dom } F^{-1} = \text{Im } F$. Questo implica che l'insieme di definizione delle soluzioni non è detto che sia l'intervallo I_x da cui siamo partiti; generalmente questo insieme dipende dalla costante c .

Dunque, riassumendo, a differenza di quello che abbiamo visto nel caso lineare, per le equazioni a variabili separate

- l'insieme di definizione delle soluzioni è un'incognita del problema
- la struttura algebrica dell'integrale generale non è più una varietà lineare
- come vedremo negli esempi che seguono, la condizione iniziale potrebbe non bastare a individuare un'unica soluzione.

Esempi

1. $y' = x y^2$

C.E. $x, y \in \mathbb{R}$.

La funzione costante $y = 0$ è soluzione.

Studiamo il problema per $y > 0$ e per $y < 0$.

In entrambi i casi, separando le variabili e integrando, si ottiene:

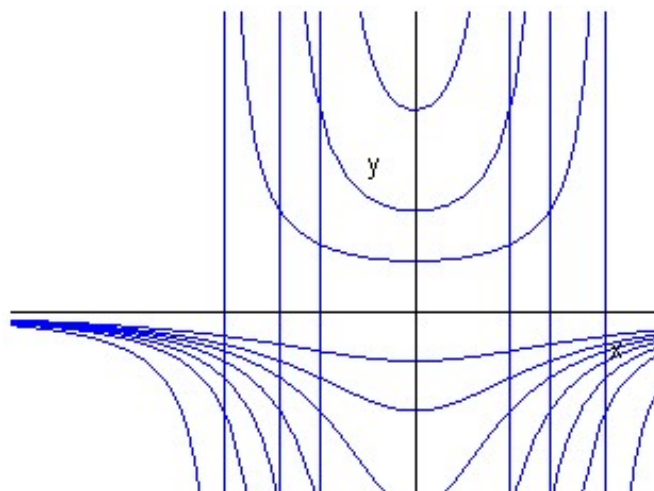
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x \, dx \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{y} = \frac{c - x^2}{2}.$$

Nel caso $y > 0$, si ottengono le soluzioni

$$y = \frac{2}{c - x^2}$$

definite per $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ (c è necessariamente positivo).

Nel caso $y < 0$, si ottengono le stesse soluzioni, ma adesso sono definite su tutto \mathbb{R} se $c < 0$, in $(-\infty, -\sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, +\infty)$ se $c \geq 0$. Il grafico della soluzione con $c = 0$ (la funzione $g(x) = -2/x^2$) separa i grafici delle soluzioni di una forma dagli altri.



Le soluzioni trovate per integrazione non si intersecano con la soluzione costante. Ognuna di esse ha un suo insieme di definizione, che dipende dalla costante arbitraria. Il problema di Cauchy ha sempre un'unica soluzione: in particolare, quello con la condizione iniziale $y(0) = 0$ è risolto solo dalla funzione costante.

Nota: $y(x)$ soluzione $\rightarrow y(-x)$

$$2. \quad y' = x \sqrt{y}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}, y \geq 0$.

La funzione costante $y = 0$ è soluzione.

Separando le variabili e integrando, si trova successivamente:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x \, dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{2}$$

Data l'arbitrarietà della costante, possiamo sostituire c con $c/2$ e riscrivere

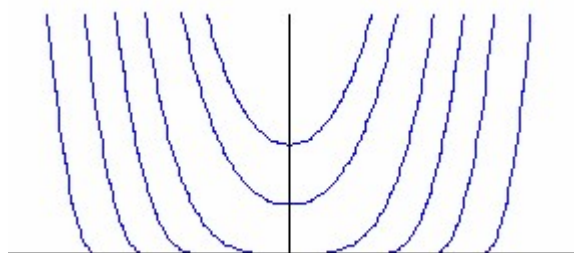
$$\sqrt{y} = \frac{x^2 + c}{4}$$

Si ottengono in tal modo le soluzioni:

$$y = \left(\frac{x^2 + c}{4} \right)^2$$

definite per $x^2 + c > 0$, cioè :

- in \mathbf{R} se $c > 0$
- in $(-\infty, -\sqrt{-c}) \cup (\sqrt{-c}, +\infty)$ se $c \leq 0$.

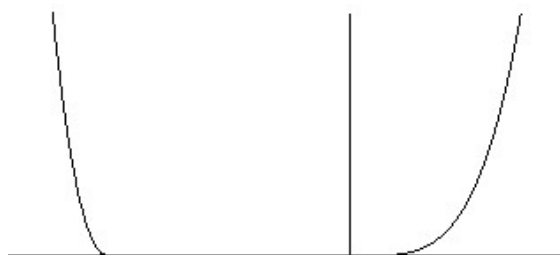


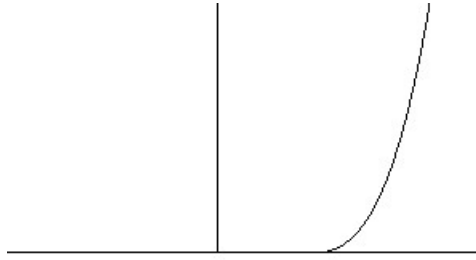
Queste soluzioni si raccordano con la soluzione costante: le funzioni che così si ottengono non solo sono continue, ma anche derivabili: infatti, indicato con x_0 un punto di raccordo, risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x \sqrt{y(x)} = 0$$

e dunque $y'(x_0) = 0$.

In tal modo si ottengono nuove soluzioni, ad esempio:





Nota: anche in questo caso si può dedurre a priori la simmetria delle soluzioni.

Per quanto riguarda il problema di Cauchy con la condizione $y(0) = y_0 \geq 0$:

- per $y_0 > 0$ ha come unica soluzione la funzione

$$y = \left(\frac{x^2 + 4\sqrt{y_0}}{4} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- per $y_0 = 0$ ha infinite soluzioni, oltre alla soluzione costante; due esempi sono rappresentati dalle figure precedenti.

Se la condizione iniziale è data in un punto $x_0 \neq 0$:

- se $y_0 = 0$, si ottengono soluzioni come sopra, in cui varie curve si raccordano con la soluzione costante
- se $y_0 > 0$, c'è un'unica curva passante per il punto (x_0, y_0) : questa può intersecare la soluzione costante (e quindi, come prima, si trovano infinite soluzioni diverse del problema di Cauchy) oppure non intersecarla (e quindi il problema ha un'unica soluzione). L'intersezione si ha se l'equazione $x^2 + c = 0$ ammette soluzione, e questo accade per $c \leq 0$. La soluzione con $c = 0$ (cioè $f(x) = x^4 / 16$) è quella che discrimina il comportamento. Consideriamo ad esempio la C.I. $y(1) = y_0$. Se $y_0 > g(1) = 1/16$, il grafico della soluzione che troviamo sta al di sopra di quello di $g(x)$ e quindi

non interseca l'asse x (cioè la soluzione costante) ; il contrario nell'altra ipotesi.

3. $y' = \exp(y)$

C.E. $x, y \in \mathbb{R}$

Non esistono soluzioni costanti.

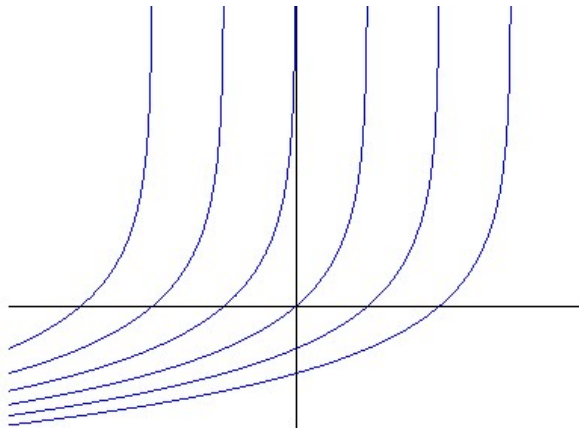
Separando le variabili e integrando, si trova successivamente:

$$\int \exp(-y) dy = \int dx$$

$$-\exp(-y) = x - c \quad \text{cioè} \quad \exp(-y) = c - x$$

$$y = -\log(c - x).$$

Le soluzioni sono definite per $x < c$.



4. $y' = \operatorname{tg} y$, $|y| < \pi/2$

$y = 0$ è soluzione costante.

Osserviamo che se $y(x)$ è soluzione, anche $-y(x)$ lo è.

Possiamo dunque limitarci a studiare l'equazione per $0 < y < \pi/2$.

Separando le variabili e integrando, si trova successivamente:

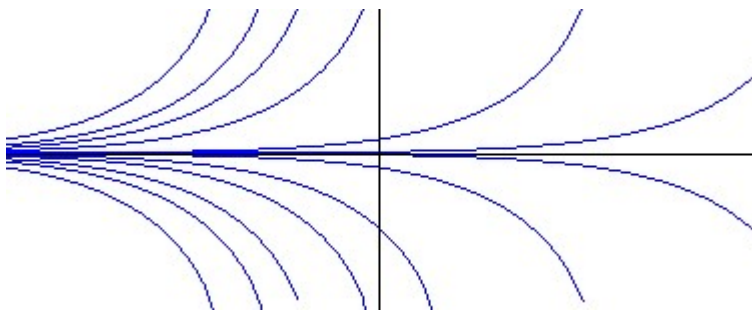
$$\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \int dx$$

$$\log |\operatorname{sen} y| = x + c \quad (\text{il valore assoluto è superfluo})$$

$$\operatorname{sen} y = k e^x \quad (\text{ponendo } k = e^c > 0)$$

$$y = \operatorname{arcsen}(k e^x).$$

Le soluzioni sono definite per $-1 < k e^x < 1$, cioè per $x < -\log k$.



5.

$$y' = 2x(1+y^2)$$

L'equazione è definita per ogni x ed y e non ha soluzioni costanti, perché la funzione $B(y) = 1 + y^2$.

.0

.) = $1 + y^2$ non si annulla (ovviamente nel campo reale in cui siamo interessati a cercare soluzioni).

Separando le variabili, si ottiene:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2x dx$$

e dunque

$$\operatorname{arctg} y = x^2 + c .$$

Esplicitando y , si ottiene

$$y = \operatorname{tg} (x^2 + c)$$

limitatamente alle x tali che

$$-\pi/2 < x^2 + c < \pi/2 .$$

Infatti, con le notazioni precedenti, $F (y) = \operatorname{arctg} y$, $G (x) = x^2$; la condizione per dare senso all'integrale in forma esplicita è che sia $x^2 + c \in \operatorname{Im} F = (-\pi/2 , \pi/2)$.

Deve dunque essere :

$$-\pi/2 - c < x^2 < \pi/2 - c$$

Perché esistano soluzioni , deve essere $\pi/2 - c \geq 0$, cioè $c \leq \pi/2$.

se $-\pi/2 - c < 0$ cioè $-\pi/2 < c \leq \pi/2$

$$\text{deve essere } |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}$$

se $-\pi/2 - c \geq 0$ cioè $c \leq -\pi/2$

$$\text{deve essere } \sqrt{-\frac{\pi}{2} - c} < |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2} - c} .$$

Per tracciare il grafico delle soluzioni, procediamo come segue:

- le funzioni sono pari, quindi le studiamo per $x > 0$, distinguendo i due casi a seconda del valore della costante c
- il segno della derivata si ricava direttamente dall'equazione: è positivo per $x > 0$
- si studia la funzione agli estremi dell'intervallo di definizione:

$$\text{se } -\pi/2 < c \leq \pi/2 \quad 0 \leq x < \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}$$

$$y(0) = \operatorname{tg} c$$

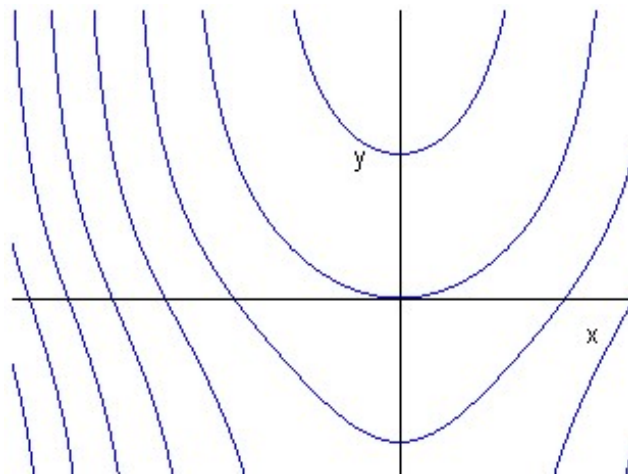
$$\text{per } x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2} - c} \quad y(x) \rightarrow +\infty$$

$$y'(0) = 0$$

$$\text{se } c \leq -\pi/2 \quad \sqrt{-\frac{\pi}{2} - c} \leq x < \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}$$

$$\text{per } x \rightarrow \sqrt{-\frac{\pi}{2} - c} \quad y(x) \rightarrow -\infty$$

$$\text{per } x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2} - c} \quad y(x) \rightarrow +\infty$$



Aggiungiamo all'equazione differenziale la condizione iniziale

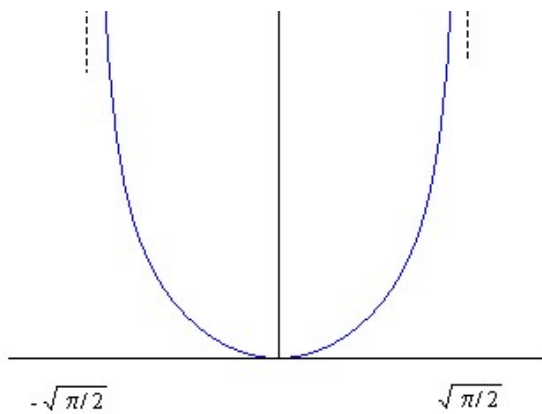
$$y(0) = 0.$$

Se **nell'integrale implicito** poniamo $x = 0, y = 0$, si trova che deve essere $c = 0$; dunque:

$$\operatorname{arctg} y = x^2, \quad -\pi/2 < x^2 < \pi/2.$$

Esplicitiamo y , scrivendo:

$$y = \operatorname{tg} x^2, \quad |x| < \sqrt{\pi/2}.$$



6.
$$y' = \frac{x}{\cos y}, \quad |y| < \pi/2$$

Separando le variabili e integrando, si ottiene successivamente

$$\int \cos y \, dy = \int x \, dx$$

$$\operatorname{sen} y = (x^2 - c)/2.$$

Esplicitando y , si ottiene

$$y = \arcsen \left(\frac{x^2 - c}{2} \right)$$

definita per

$$-1 < \frac{x^2 - c}{2} < 1 \quad \text{cioè} \quad c - 2 < x^2 < c + 2.$$

Perché esistano soluzioni, deve essere $c + 2 > 0$, cioè $c > -2$.

Se $-2 < c \leq 2$ deve essere

$$|x| < \sqrt{c+2}$$

se $c > 2$

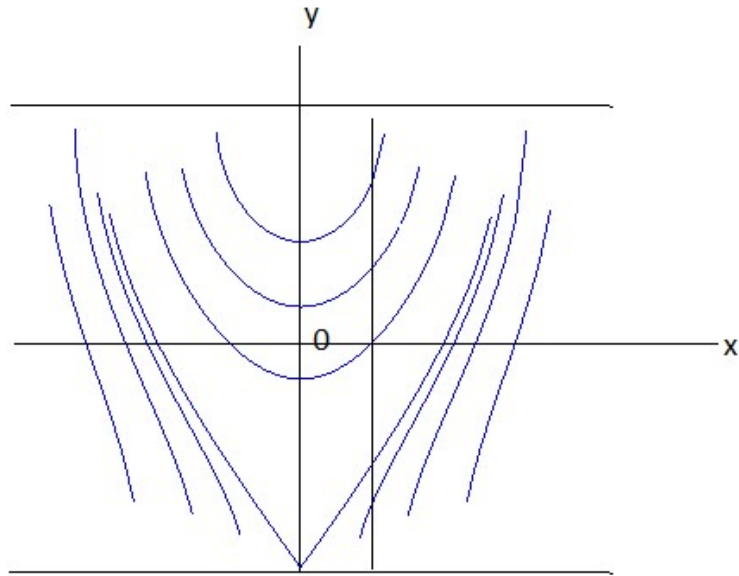
$$\sqrt{c-2} < |x| < \sqrt{c+2}$$

Per tracciare il grafico delle soluzioni, procediamo come segue:

- le funzioni sono pari; possiamo limitarci a studiarle per $x \geq 0$, distinguendo i due casi a seconda del valore della costante c
- il segno della derivata si ricava direttamente dall'equazione: è positivo per $x > 0$
- si studia il comportamento della funzione agli estremi dell'intervallo di definizione:

$$\text{per } x \rightarrow \sqrt{c+2} \quad y(x) \rightarrow \pi/2$$

$$\text{per } x \rightarrow \sqrt{c-2} \quad y(x) \rightarrow -\pi/2$$



Imponiamo la condizione iniziale

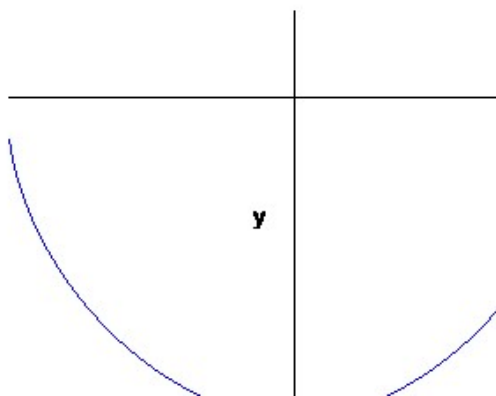
$$y(0) = 0.$$

Sostituendo nell'integrale in forma implicita , si trova che deve essere $c = 0$; dunque:

$$y = \arcsen (x^2 / 2)$$

con

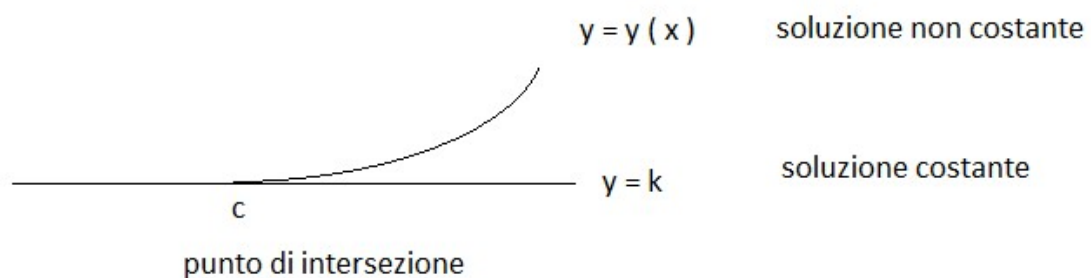
$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$



Il problema di Cauchy ovvero con condizione iniziale

Se l'equazione differenziale non ha soluzioni costanti, il problema di Cauchy ha un'unica soluzione. In caso contrario, l'unicità si perde quando le soluzioni non costanti intersecano quella costante.

Sia $y = k$ una soluzione costante e sia (c, k) un punto in cui una soluzione incontra la soluzione costante.



Scritta l'equazione nella forma

$$\frac{y'(x)}{B(y(x))} = A(x)$$

integriamo in un intervallo tra x_0 ed x :

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{B(y(t))} dt = \int_{x_0}^x A(t) dt ;$$

poniamo $y(t) = s$:

$$\int_{y_0}^y \frac{ds}{B(s)} = \int_{x_0}^x A(t) dt$$

(avendo posto $y_0 = y(x_0)$). Passiamo al limite per $x \rightarrow c$.

Il secondo membro tende a $\int_{x_0}^c A(t) dt$ che esiste finito; lo stesso deve dunque fare il primo membro.

Questo tende a $\int_{y_0}^k \frac{ds}{B(s)}$ che è improprio (perché $B(k) = 0$).

Dunque l'intersezione delle curve con una soluzione costante (e quindi la perdita di unicità di soluzione per il problema di Cauchy) si ottiene solo se l'integrale improprio di $1/B(y)$ esiste in un intorno di k .

Nell'esempio 1. era $B(y) = y^2$: la funzione $1/y^2$ non è integrabile nell'intorno di 0; le varie soluzioni del problema non si raccordano con la soluzione costante. Il problema di Cauchy ha sempre un'unica soluzione.

Nell'esempio 2. invece era $B(y) = \sqrt{y}$: la funzione $1/\sqrt{y}$ è integrabile nell'intorno di 0; le varie soluzioni del problema si raccordano con la soluzione costante. Per il problema di Cauchy si perde l'unicità di soluzione.

Guardiamo adesso un altro modo per stabilire l'unicità di soluzione.

Sia $y(x) = k$ una soluzione costante dell'equazione: quindi $B(k) = 0$. Supponiamo che $B(y)$ sia infinitesima di ordine α per $y \rightarrow k$ (ricordiamo però che non tutti gli infinitesimi hanno un ordine; quindi l'ipotesi fatta costituisce una restrizione rispetto al caso generale):

$$\exists L \in \mathbb{R} - \{0\} : \lim_{y \rightarrow k} \frac{B(y)}{(y-k)^\alpha} = L.$$

La funzione

$$C(y) = \frac{B(y)}{(y-k)^\alpha}$$

ha dunque una discontinuità eliminabile in k , che eliminiamo ponendo $C(k) = L$. Possiamo dunque scrivere

$$B(y) = C(y) (y-k)^\alpha$$

con $C(y)$ continua.

Verifichiamo se $B(y)$ oltre che continua è anche derivabile in k :

$$\lim_{y \rightarrow k} \frac{B(y) - B(k)}{y - k} = \lim_{y \rightarrow k} C(y) (y-k)^{\alpha-1} = L \lim_{y \rightarrow k} (y-k)^{\alpha-1}$$

Essendo $L \neq 0$, il limite esiste finito se e solo se $\alpha \geq 1$.

Questi sono anche i valori di α per i quali la funzione

$$\frac{1}{B(y)} = \frac{1}{C(y) (y-k)^\alpha}$$

risulta non integrabile nell'intorno di k e quindi quelli che garantiscono l'unicità di soluzione del problema con condizione iniziale.

In conclusione si hanno questi risultati:

$$\exists B'(k) \Leftrightarrow \frac{1}{B(y)} \text{ non è integrabile nell'intorno di } k$$

↓

c'è unicità di soluzione

$$\nexists B'(k) \Leftrightarrow \frac{1}{B(y)} \text{ è integrabile nell'intorno di } k$$

↓

non c'è unicità di soluzione

Nell'esempio 1. era $B(y) = y^2$: poiché $B'(0)$ esiste, il problema di Cauchy ha sempre un'unica soluzione.

Nell'esempio 2. invece era $B(y) = \sqrt{y}$: poiché $B'(0)$ non esiste, il problema di Cauchy non ha unicità di soluzione.