Equazioni differenziali lineari di ordine n: risultati generali

Sono le equazioni esprimibili nella forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \,,$$

dove:

$y^{(k)}$ indica la derivata di ordine k

i coefficienti $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ e il termine noto $f(x)$ sono funzioni assegnate, continue in un dato intervallo I; in particolare l'equazione si dice omogenea se è nullo il termine noto.

E' evidente che i casi particolari ottenuti per n = 1 e n = 2 sono le equazioni sinora studiate. I risultati validi per quelle equazioni si estendono in modo naturale al caso generale; più precisamente:

- nelle ipotesi fatte l'equazione ammette sempre soluzioni

- l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n, descritto dunque dalle combinazioni lineari di n soluzioni $y_{01}(x)$ … $y_{0n}(x)$ indipendenti (cioè nessuna delle quali si può ottenere come combinazione lineare delle rimanenti)

- se $y(x)$ e $\overline{y}(x)$ sono due soluzioni dell'equazione completa, la loro differenza $y(x) - \overline{y}(x)$ risolve l'equazione omogenea e dunque è

  $$y(x) - \overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, y_{0i}(x)$$

  per un'opportuna scelta dei coefficienti c_i.

- l’integrale generale dell’equazione completa (cioè l’insieme di tutte le soluzioni) ha dunque la forma:

$$y\ (x) = \overline{y}(x)\ + \sum_{i=1}^{n} c_i\ y_{0i}(x).$$

- il problema di Cauchy con le n condizioni iniziali

$$y(x_0)=y_0\ \ ,\ y'(x_0)=y_1\ \ ,\ \dots\ ,\ \ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

  ha un’unica soluzione (cioè delle infinite soluzioni dell’equazione solo una verifica le condizioni iniziali).

I risultati precedenti stabiliscono che per trovare <u>tutte</u> le soluzioni dell’equazione dobbiamo trovare:

- n soluzioni indipendenti dell’equazione omogenea

- una soluzione particolare dell’equazione completa.

In generale non è possibile trovare queste soluzioni in forma elementare: i metodi che presentiamo si riferiscono a casi particolari sia per quanto riguarda i coefficienti che per quanto riguarda il termine noto (analoghi a quelli già studiati per le equazioni del secondo ordine).

Equazioni differenziali lineari di ordine n: metodo del polinomio caratteristico per la risoluzione dell'equazione omogenea nel caso di coefficienti costanti

Per l'equazione omogenea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

con coefficienti a_1, …., a_n **costanti** si cercano soluzioni nella forma esponenziale e^{kx}. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve risultare e^{kx} P (k) = 0 essendo P (k) il polinomio caratteristico $P(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n$.

Per ogni radice k del polinomio, con molteplicità m, si deducono m soluzioni dell'equazione omogenea date da

$$e^{kx},\ x e^{kx},\ \ldots,\ x^{m-1} e^{kx}.$$

Se k = p + i q è una radice complessa, sapendo che anche $\bar{k}$ = p – i q è radice con la stessa molteplicità, il metodo precedente fornisce 2m soluzioni complesse

e^{px} (cos q x $\pm$ i sen q x)

x e^{px} (cos q x $\pm$ i sen q x)

....

$x^{m-1} e^{px}$ (cos q x $\pm$ i sen q x)

e da queste si deducono 2m soluzioni reali

$$e^{px}\cos qx\ ,\ x\,e^{px}\cos qx\ ,\ \ldots\ ,\ x^{m-1}\,e^{px}\ \cos qx$$

$$e^{px}\,\text{sen}\, qx\ ,\ x\,e^{px}\,\text{sen}\, qx\ ,\ \ldots\ ,\ x^{m-1}\,e^{px}\ \text{sen}\, qx$$

Se sono note tutte le radici del polinomio caratteristico con la loro molteplicità, il metodo permette di costruire n soluzioni dell'equazione omogenea e si può dimostrare che sono tra di loro indipendenti.

Esempi

1. $y^{(iv)} - y = 0$

Il polinomio caratteristico associato $P(k) = k^4 - 1$ ha quattro radici semplici: ± 1, $\pm i$, cui corrispondono le soluzioni e^x, e^{-x}, cos x, sen x ; l'integrale dell'equazione si scrive dunque nella forma

$$y = a\,e^x + b\,e^{-x} + c\cos x + d\,\text{sen}\, x\,,$$

con a, b, c, d costanti arbitrarie, o anche (usando un po' di trigonometria) nella forma equivalente

$$y = a\,e^x + b\,e^{-x} + c\cos(x - x_0).$$

2. $y^{(iv)} + y = 0$

Il polinomio caratteristico associato $P(k) = k^4 + 1$ ha quattro radici semplici

$$(1 \pm i)/\sqrt{2}\ ,\ (-1 \pm i)/\sqrt{2}$$

a cui corrispondono le soluzioni

$$e^{x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2}) \ , \ e^{x/\sqrt{2}} \operatorname{sen}(x/\sqrt{2}) \ ,$$

$$e^{-x/\sqrt{2}} \cos(x/\sqrt{2}) \ , \ e^{-x/\sqrt{2}} \operatorname{sen}(x/\sqrt{2}) \ .$$

L'integrale dell'equazione si scrive dunque nella forma

$$y = e^{x/\sqrt{2}} [a \cos(x/\sqrt{2}) + b \operatorname{sen}(x/\sqrt{2})] +$$

$$+ e^{-x/\sqrt{2}} [c \cos(x/\sqrt{2}) + d \operatorname{sen}(x/\sqrt{2}]$$

3. $y''' + y'' - y' - y = 0$

Il polinomio caratteristico $P(k) = k^3 + k^2 - k - 1 = (k-1)(k+1)^2$ ammette la radice semplice $k = 1$ e la radice doppia $k = -1$; a queste corrispondono le soluzioni e^x, e^{-x}, $x\ e^{-x}$. L'integrale è dunque dato da

$$y = a e^x + e^{-x} (c + d x) .$$

4. $y''' + y' - 10 y = 0$

Il polinomio caratteristico $P(k) = k^3 + k - 10 = (k-2)(k^2 + 2k - 5)$ ammette le radici semplici 2, $-1 \pm 2i$, a cui corrispondono le soluzioni e^{2x}, $e^{-x} \cos 2x$, $e^{-x} \operatorname{sen} 2x$. L'integrale è dunque dato da

$$y = a e^{2x} + e^{-x} (b \cos 2x + c \operatorname{sen} 2x) .$$

Equazioni differenziali lineari di ordine n: metodo dei coefficienti indeterminati per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa nel caso di coefficienti costanti

Nello studio delle equazioni lineari del secondo ordine abbiamo visto due metodi per trovare una soluzione particolare: quello dei coefficienti indeterminati (che si applica nel caso di coefficienti costanti e termine noto di tipo particolare) e quello della variazione delle costanti arbitrarie (che si applica in tutti i casi in cui si conoscano due soluzioni indipendenti dell'omogenea, quindi con coefficienti non necessariamente costanti). Questi metodi si estendono al caso generale, ma il secondo diventa di difficile applicazione quando l'ordine dell'equazione aumenta.
Limitiamoci a considerare il primo metodo, senza ripetere lo schema generale, ma presentando alcuni esempi.

1. $y^{(iv)} - 10\, y'' + 9\, y = x^2 - x$

Si cerca una soluzione particolare nella forma $A x^2 + B x + C$; sostituendo nell'equazione, si ottiene che deve essere $9 A x^2 + 9 B x + (9 C - 20 A) = x^2 - x$ e quindi, uguagliando i coefficienti delle potenze corrispondenti: $A = 1 / 9$, $B = -1 / 9$, $C = 20 / 81$. Si deduce in tal modo la soluzione $(9 x^2 - 9 x + 20) / 81$.

2. $y^{(iv)} - 10\, y'' = x^2 - x$

Poiché nell'equazione sono nulli sia il coefficienti di y che quello di y ', invece di cercare una soluzione particolare analoga a quella dell'esempio precedente, si cerca nella forma $x^2 (A x^2 + B x + C)$. Sostituendo, si trova $A = -1 / 120$, $B = 1 / 60$, $C = -1 / 100$.

3. $y''' + 2\,y = x\,e^{x}$

Poiché l'esponente 1 non è radice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione nella forma (A x + B) e ^{x}.
Sostituendo, si trova che deve essere (3 A + 3 B) + 3 A x = x, cioè A = 1 / 3, B = -1 / 3.

4. $y''' + y = x\,e^{-x}$

Poiché l'esponente -1 è radice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione nella forma x (A x + B) e $^{-x}$. Sostituendo, si trova A = 1 / 6 , B = 1 / 3.

5. $y^{(iv)} - y = \cos x$

Passiamo in campo complesso, scrivendo l'equazione $z^{(iv)} - z = e^{ix}$.
Poiché l'esponente i è radice (semplice) del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione particolare nella forma A x e ^{ix}.
Sostituendo, si trova che deve essere - 4 i A = 1, cioè A = i / 4. La parte reale della soluzione complessa i x e ^{ix} / 4 trovata fornisce la soluzione reale - x sen x / 4.

6. $y^{(iv)} + y = e^{x}\ \text{sen}\,x$

Passiamo in campo complesso : $z^{(iv)} + z = e^{(1+i)\,x}$.
Poiché l'esponente 1 + i non è radice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione particolare nella forma A e $^{(1+i)\,x}$.
Sostituendo, si trova che deve essere A = -1 / 3. La parte immaginaria della soluzione complessa - e $^{(1+i)\,x}$ / 3 trovata fornisce la soluzione reale - e^{x} sen x / 3.