Equazioni lineari del secondo ordine: risultati generali

Si dicono **equazioni differenziali lineari del secondo ordine** (in forma normale) le equazioni esprimibili nella forma:

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x),$$

dove a (x), b (x) e f (x) sono funzioni assegnate, che supponiamo continue in un dato intervallo I : a (x) e b (x) si dicono coefficienti dell'equazione, f (x) termine noto; quando il termine noto è nullo, l'equazione si dice omogenea, altrimenti si dice completa.
Per questa equazione valgono risultati analoghi a quelli visti nel precedente paragrafo.

- **Esistono sempre soluzioni** (La dimostrazione **non** è banale).

- **L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale** (Si dimostra come per le equazioni del primo ordine).

- **Questo spazio ha dimensione 2,** cioè esistono due soluzioni dell'equazione omogenea $y_{01}(x)$, $y_{02}(x)$ linearmente indipendenti (ossia, nessuna delle due è multipla dell'altra) e tali che ogni soluzione della stessa equazione può essere scritta come loro combinazione lineare, cioè nella forma $c_1\, y_{01}(x) + c_2\, y_{02}(x)$. (La dimostrazione **non** è banale).
  Queste due soluzioni indipendenti si dicono costituire una base dello spazio in questione.

- **Se y, $\bar{y}$ sono due soluzioni dell'equazione completa, la loro differenza risolve l'equazione omogenea e dunque:**

$$y(x) - \bar{y}(x) = c_1\, y_{01}(x) + c_2\, y_{02}(x).$$

(La dimostrazione è come nel caso del primo ordine).

- **L’integrale generale ha dunque la forma:**

$$y(x) = \overline{y}(x) + c_1\, y_{01}(x) + c_2\, y_{02}(x).$$

- **Il problema di Cauchy con la condizione**

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y_1$$

  ha una e una sola soluzione.

  (La dimostrazione non è banale).

Quest’ultimo risultato afferma che, a differenza di quanto visto per le equazioni del primo ordine, curve integrali diverse possono anche intersecarsi, ma in un punto di intersezione le loro rette tangenti devono essere distinte. Dal punto di vista fisico, interpretata l’equazione differenziale come un modello per descrivere l’evoluzione di un sistema dinamico, il risultato afferma che il moto è individuato quando si conosca posizione e velocità ad uno stesso assegnato istante.

I risultati precedenti stabiliscono che per trovare **tutte** le soluzioni dell’equazione dobbiamo trovare:

- **due soluzioni indipendenti dell’equazione omogenea**

- **una soluzione particolare dell’equazione completa.**

In generale non è possibile trovare in forma elementare queste soluzioni: noi ci limiteremo a studiare il caso particolare delle equazioni **con coefficienti costanti**.

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Premesse

Una funzione

$$z : I \subset R \rightarrow C$$

$$x \rightarrow z(x) = u(x) + i\,v(x)$$

si dice **complessa di variabile reale**: le funzioni u (x) e v (x) (<u>entrambe funzioni reali</u>) si dicono rispettivamente **parte reale e parte immaginaria** della funzione.

In particolare, dato $k = p + i\,q \in C$, si definisce **esponenziale complesso** la funzione

$$e^{kx} = e^{px}(\cos qx + i \operatorname{sen} qx).$$

Ad esempio :

$e^{(1+i)x} = e^{x}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

$e^{(1-i)x} = e^{x}(\cos x - i \operatorname{sen} x)$ (si dice coniugata della precedente)

$e^{2ix} = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$

$e^{2x} \cos 3x = \operatorname{Re} e^{(2+3i)x}$

$e^{-x} \operatorname{sen} x = \operatorname{Im} e^{(-1+i)x}$

$\cos 2x = \operatorname{Re} e^{2ix}$

$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$

La **derivata** della funzione complessa z (x) è definita da :

$$z'(x) = u'(x) + i\,v'(x).$$

La definizione si estende in maniera ovvia alle derivate di ordine superiore.

In particolare è facile verificare che :

$$D\,e^{kx} = k\,e^{kx},$$

in altre parole, la derivata dell'esponenziale complesso segue la stessa regola formale di quella per l'esponenziale reale.

Tenuto conto delle regole di derivazioni sopra introdotte, una funzione complessa può essere soluzione di un'equazione differenziale reale (cioè a coefficienti reali, come sono le equazioni di cui ci stiamo occupando) .
Ad esempio :

e^{ix} è una soluzione dell'equazione $y'' + y = 0$

$- i x e^{ix} / 2$ lo è dell'equazione $y'' + y = \cos x$.

Proprietà

- **Se $z(x) = u(x) + i\,v(x)$ è soluzione complessa dell'equazione omogenea $y'' + a\,y + b\,y = 0$ a coefficienti costanti (reali), allora $u(x)$ e $v(x)$ sono soluzioni reali della stessa equazione.**

Infatti, per ipotesi:

$$(u'' + i v'') + a(u' + i v') + b(u + i v) = 0$$

cioè

$$(u'' + a u' + b u) + i\,(v'' + a v' + b v) = 0.$$

Questo accade solo se:

$$u'' + a u' + b u = 0 \quad , \quad v'' + a v' + b v = 0.$$

Esempio

La funzione e^{ix} è soluzione complessa dell'equazione $y'' + y = 0$.
Le funzioni cosx e senx (rispettivamente parte reale e parte immaginaria di e^{ix}) sono soluzioni reali della stessa equazione.

- **Se $z(x) = u(x) + i\,v(x)$ è soluzione complessa dell'equazione $y'' + a\,y' + b\,y = f(x) + i\,g(g)$ a coefficienti costanti (reali), allora $u(x)$ e $v(x)$ sono soluzioni reali dell'equazione con termine noto $f(x)$ e $g(x)$ rispettivamente.**

Infatti, per ipotesi:

$$(u'' + i\,v'') + a\,(u' + i\,v') + b\,(u + i\,v) = f(x) + i\,g(x)$$

cioè

$$(u'' + a\,u' + b\,u) + i\,(v'' + a\,v' + b\,v) = f(x) + i\,g(x).$$

Questo accade solo se:

$$u'' + a\,u' + b\,u = f(x) \quad , \quad v'' + a\,v' + b\,v = g(x).$$

- Esempio 1

$\mathbf{z'' + z = e^{2ix}}$ $\rightarrow$ $z(z) = -1/3\,e^{2ix} = -1/3\,(\cos 2x + i\,\operatorname{sen} 2x)$ è una soluzione

$y'' + y = \cos 2x$ $\rightarrow$ $y(x) = -1/3 \cos 2x$ è una soluzione

$y'' + y = \operatorname{sen} 2x$ $\rightarrow$ $y(x) = -1/3 \operatorname{sen} 2x$ è una soluzione

- Esempio 2

$y'' + y = \operatorname{sen} x.$

Poiché $\operatorname{sen}x = \operatorname{Im} e^{ix}$, consideriamo l'equazione complessa :

$$z'' + z = e^{ix}.$$

La funzione $z (x) = – i/2 \ x e^{i x}$ è una soluzione, come si può verificare facilmente.
Ma

$$- i/2 \ x e^{i x} = - i/2 x (\cos x + i \operatorname{sen} x) = x/2 (\operatorname{sen} x – i \cos x)$$

e dunque $\operatorname{Im} z (x) = - x/2 \cos x$.
Di conseguenza la funzione $y (x) = - x/2 \cos x$ è una soluzione dell’equazione **reale** di partenza.