Nota sulle equazioni differenziali lineari del I ordine

L'integrale generale

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt \;+\; c\, e^{-A(x)}$$

non dipende né dalla scelta della particolare primitiva $A(x)$ né da quella del punto x_0 (cioè dalla scelta della primitiva di $e^{A(x)} f(x)$) : la variazione formale che si ottiene nell'espressione è assorbita dall'arbitrarietà della costante c.

Verifica:

1. Nell'integrale generale sostituiamo $A(x)$ con $A(x) + k$ (k costante).

$$y = e^{-A(x)-k} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)+k} f(t)\, dt \;+\; c\, e^{-A(x)-k}$$

$$y = e^{-A(x)} e^{-k} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} e^{k} f(t)\, dt + c\, e^{-k} e^{-A(x)}$$

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c_1 e^{-A(x)}$$

Data l'arbitrarietà di c , anche $c_1 = c\, e^{-k}$ indica una costante arbitraria.

2. Nell'integrale generale sostituiamo x_0 con x_1

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_1}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c\, e^{-A(x)}$$

$$y = e^{-A(x)} \left(\int_{x_1}^{x_0} e^{A(t)} f(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt \right) + c\, e^{-A(x)}$$

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_1}^{x_0} e^{A(t)} f(t)\, dt + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c\, e^{-A(x)}$$

$$y = k\, e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c\, e^{-A(x)}$$

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + (c+k)\, e^{-A(x)}$$

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c_1\, e^{-A(x)}$$

(c_1 costante arbitraria).