Equazioni differenziali

Si dicono **equazioni differenziali** quelle equazioni che hanno per incognita una funzione, che deve essere determinata a partire da una relazione in cui sono coinvolte una o più delle sue derivate; l'ordine massimo di tali derivate è detto **ordine** dell'equazione.
Soluzione di un'equazione differenziale in un intervallo è una funzione che, sostituita nell'equazione, la trasforma in una identità valida in tale intervallo.

L'importanza delle equazioni differenziali è dovuta al loro uso assai frequente nella costruzione di modelli matematici di fenomeni della scienza e della tecnica, nel senso che molte leggi e relazioni tra grandezze sono espresse in forma matematica come equazioni differenziali.
Ad esempio, la seconda legge del moto di Newton in una dimensione ($F = m\,a$, come relazione tra grandezze scalari) stabilisce che la posizione $x(t)$ all'istante t di un corpo di massa m costante, soggetto ad una forza $F(t)$, deve soddisfare l'equazione differenziale del secondo ordine $m\,x'' = F(t)$ detta equazione del moto.
In modo analogo, la biomassa $m(t)$ all'istante t di una coltura di virus che si sviluppa in un mezzo contenente del nutrimento varia con una rapidità proporzionale alla biomassa, secondo la legge $m' = k\,m(t)$, che è l'equazione differenziale della crescita esponenziale se $k > 0$ o del decadimento esponenziale se $k < 0$.

Abbiamo già incontrato un esempio di equazione differenziale (del primo ordine) studiando le primitive di una funzione $f(x)$, $x \in I$: infatti questo problema può essere scritto nella forma

$$y' = f(x)$$

e per esso abbiamo trovato una serie di risultati che anticipano quelli che incontreremo più avanti:

- l'equazione può non ammettere soluzioni
- se $f(x)$ è continua, l'equazione ammette infinite soluzioni
- le soluzioni differiscono in ogni intervallo per una costante

- le soluzioni possono essere rappresentate nella forma integrale $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$
- se imponiamo alle soluzioni di verificare la condizione $y(x_0) = y_0$, la costante arbitraria c rimane univocamente determinata . Con termine ripreso dalla fisica si parla di condizione iniziale; dal punto di vista geometrico, è assegnato il passaggio del grafico della soluzione per un punto (x_0, y_0) assegnato .

Nel nostro corso esamineremo solo alcuni particolari tipi di equazione differenziale e anche di questi ci limiteremo a presentare soltanto i risultati principali.

Equazioni lineari del primo ordine

Sono quelle esprimibili nella forma

$$y' + a(x)\, y = f(x)$$

dove a (x) e f (x) sono funzioni assegnate, che supponiamo continue in un dato intervallo I: a (x) si dice **coefficiente** dell'equazione , f (x) **termine noto**; quando il termine noto è nullo, l'equazione si dice **omogenea** , altrimenti si dice **completa**.

Indicata con A (x) una primitiva della funzione a (x), moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per exp (A (x)):

$$y'\, e^{A(x)} + y\, a(x)\, e^{A(x)} = e^{A(x)} f(x).$$

Il primo membro è la derivata del prodotto y exp (A (x)); possiamo dunque riscrivere l'equazione nella forma equivalente:

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{A(x)}\right) = e^{A(x)} f(x).$$

In questo modo l'equazione è stata ricondotta alla forma Y' = F (x) ovvero alla ricerca delle primitive della funzione a secondo membro; deve dunque risultare

$$y\, e^{A(x)} = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c$$

e perciò

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c\, e^{-A(x)}$$

L'espressione trovata rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale e viene comunemente detta **integrale generale dell'equazione.**

Osservazione

L'integrale generale non dipende né dalla scelta della particolare primitiva A (x) né da quella del punto x_0 : la variazione formale che si ottiene nell'espressione dell'integrale generale è assorbita dall'arbitrarietà della costante c. La verifica è in una nota separata.

Accanto all'equazione differenziale consideriamo il problema (detto di **Cauchy** o **con condizione iniziale**)

$$\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se l'equazione rappresenta l'evoluzione nel tempo di una grandezza fisica, la variabile x esprime il tempo e la condizione di Cauchy assegna la grandezza ad un dato istante. Ad esempio, se l'equazione rappresenta il moto di una particella, la condizione di Cauchy assegna la posizione della particella ad un dato istante.

Questo problema ha una e una sola soluzione, il che dal punto di vista geometrico significa che le varie **curve integrali** (cioè, i grafici delle soluzioni) non si intersecano, mentre dal punto di vista fisico significa che il moto è univocamente determinato dalla legge di evoluzione e dalla posizione iniziale.

Per provare l'unicità di soluzione del problema, scriviamo l'integrale generale dell'equazione, prendendo come punto x_0 quello dato dal problema

$$y = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c\, e^{-A(x)}$$

Sostituendo x con x_0 e y con y_0, l'uguaglianza è verificata solo per $c = y_0\, e^{A(x_0)}$.

Esempi

1. $\mathbf{y' - y = - x}$

Con le notazioni precedenti è a (x) = - 1 e dunque A (x) = - x; moltiplicando ambo i membri dell'equazione per exp (- x), si ottiene:

$$y' e^{-x} - y e^{-x} = - x e^{-x}$$

cioè

$$D (y e^{-x}) = - x e^{-x}$$

Poiché

$$\int - x e^{-x} dx = (x + 1) e^{-x} + c$$

deve essere

$$y e^{-x} = (x + 1) e^{-x} + c$$

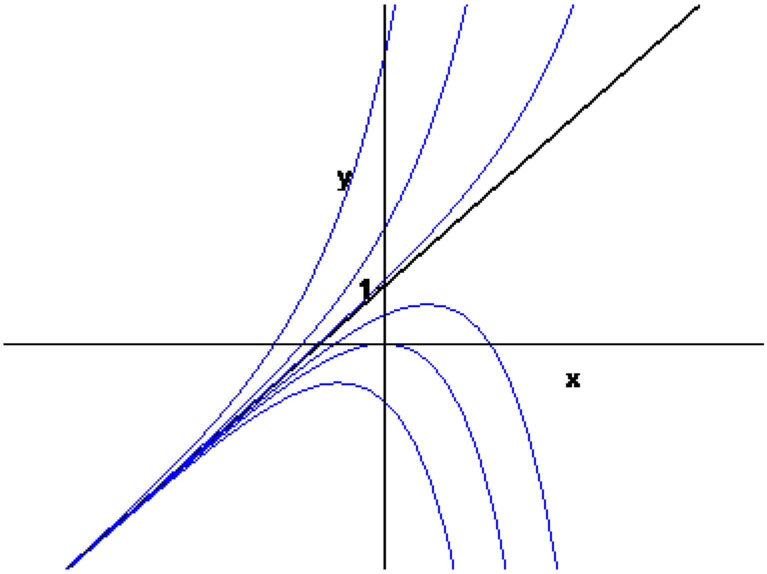
cioè

$$y = x + 1 + c e^{x}$$

che è l'integrale generale dell'equazione.
Adesso associamo all'equazione precedente il problema di Cauchy:

$$\mathbf{y' = y - x \, , \; y (0) = 1}$$

Imponendo all'integrale generale la condizione iniziale, si ottiene che deve essere c = 0; dunque la funzione y = x + 1 è l'unica soluzione del problema.



2. $y' - 2xy = 1$

Essendo a (x) = - 2 x, prendiamo A (x) = - x ^{2} e moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per exp (- x^2) :

$$y' e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} y = e^{-x^2}$$

cioè

$$D(e^{-x^2} y) = e^{-x^2}$$

Da questo deduciamo:

$$e^{-x^2} y = \int_0^x e^{-t^2} dt + c$$

cioè

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + c\, e^{x^2}$$

che è l'integrale generale dell'equazione.

Adesso associamo all'equazione precedente il problema di Cauchy:

$$y' - 2xy = 1 \ , \quad y(0) = 0$$

Imponendo all'integrale generale sopra trovato la condizione iniziale, si ottiene che deve essere c = 0; dunque la funzione

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

è l'unica soluzione del problema.

3. $y' - y \operatorname{tg} x = 1/2 \ , \quad y(0) = 1$ (con $x \in (-\pi/2, \pi/2)$)

Essendo $a(x) = -\operatorname{tg} x$, scegliamo $A(x) = \log\cos x$ (nell'intervallo in cui studiamo il problema il valore assoluto è superfluo).
Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per cosx, ottenendo

$$y' \cos x - y \operatorname{tg} x \cos x = \cos x / 2$$

cioè

$$D(y \cos x) = \cos x / 2.$$

Da questa si deduce:

$$y \cos x = \operatorname{sen} x / 2 + c$$

cioè

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{c}{\cos x}$$

Imponendo la condizione iniziale:

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{1}{\cos x}.$$

4. $\quad$ **$x\,y' - y = x$**

Scriviamo l'equazione **in forma normale**, cioè in modo che il coefficiente di y' sia 1; per fare questo, basterà dividere per x:

$$y' - y / x = 1$$

e studiamola separatamente nei due intervalli $x > 0$ e $x < 0$.

Essendo $a(x) = -1/x$, prendiamo $A(x) = -\log|x|$ e moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $1/|x|$:

$$D\,\frac{y}{|x|} = \frac{1}{|x|}\,.$$

Per $x > 0$ si ottiene:

$$y/x = \log x + c_1$$

cioè

$$y = x \log x + c_1\, x.$$

Per $x < 0$ si ha:

$$-y/x = -\log(-x) + c_2$$

cioè

$$y = x \log(-x) - c_2 x.$$

In definitiva, si ottiene:

$$y = x \log |x| + c x$$

<u>dove la costante può essere scelta in modo indipendente nei due intervalli</u>.

Le soluzioni possono essere prolungate con continuità in $x = 0$ con valore 0; nessuna di queste è però derivabile in $x = 0$ e dunque l'equazione non ha soluzioni definite su tutto **R**. La differenza di questo risultato rispetto alla situazione standard è dovuta al fatto che l'equazione non può essere messa in forma normale su tutto **R.**

5. $\mathbf{x\, y' - y = x^2 \cos x}$

Scriviamo l'equazione in forma normale:

$$y' - y/x = x \cos x$$

e studiamola separatamente nei due intervalli $x > 0$ e $x < 0$. Come nell'esempio precedente, moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $1 / |x|$, ottenendo

$$D \frac{y}{|x|} = (\operatorname{sgn} x) \cos x .$$

Dunque si ottiene:

$$y = x \operatorname{sen} x + c_1 x \quad , \quad \text{se } x > 0$$

$$y = x \operatorname{sen} x - c_2 x \quad , \quad \text{se } x < 0.$$

In definitiva, possiamo scrivere:

$$y = x\,(c + \operatorname{sen} x)$$

dove c può essere scelta in modo indipendente nei due intervalli $x < 0$, $x > 0$.
Le soluzioni sono dunque definite (e derivabili) su tutto **R;** il problema di Cauchy con la condizione $y(0) = k$ non ha alcuna soluzione se $k \neq 0$, ne ha infinite se $k = 0$ e dipendono da 2 costanti arbitrarie indipendenti.

Riprendiamo l'integrale generale dell'equazione:

$$y(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c\, e^{-A(x)}$$

e scriviamolo nella forma

$$y(x) = \overline{y}(x) + c\, y_0(x)\,.$$

Osserviamo che:

- la funzione $\overline{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione, più precisamente quella ottenuta dando alla costante arbitraria c il valore 0

- le funzioni $c\, y_0(x)$ sono le soluzioni dell'equazione omogenea, cioè dell'equazione $y' + a(x)\, y = 0$; al variare della costante arbitraria c formano un insieme che in algebra è detto spazio vettoriale di dimensione 1 (le funzioni sono multiple di una soluzione non nulla – è un esponenziale !). L'equazione omogenea ha infinite soluzioni : una identicamente nulla, le altre che non si annullano in nessun punto.

Questi risultati che abbiamo stabilito a partire dalla soluzione esplicita dell'equazione possono essere dedotti a priori :

- **l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale** cioè un insieme chiuso rispetto alle operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per un numero.

  Questo significa che se $u(x)$, $v(x)$ sono due soluzioni dell'equazione omogenea $y' + a(x)\,y = 0$, allora anche $u(x) + v(x)$ e $k\,u(x)$ lo sono.

  Infatti, per ipotesi $u' + a\,u = 0$, $v' + a\,v = 0$; sommando membro a membro, si deduce $(u+v)' + a\,(u+v) = 0$ e questo significa che la funzione $u + v$ è soluzione.
  In maniera analoga, moltiplicando membro a membro per k la prima equazione, si ottiene $(k\,u)' + a\,(k\,u) = 0$, cioè anche $k\,u$ è soluzione.

☑

- **questo spazio vettoriale ha dimensione 1**, cioè se $y_0(x)$ è una soluzione non nulla di questa equazione, ogni altra soluzione è della forma $y(x) = c\,y_0(x)$.

  Infatti

$$D\left(\frac{y}{y_0}\right) = \frac{y'\,y_0 - y\,y_0'}{y_0^2} = \frac{a\,y\,y_0 - a\,y\,y_0}{y_0^2} = 0$$

  e dunque

  y / y_0 è costante.

  Questa dimostrazione **non è corretta**, perché la funzione $y_0(x)$ – pur non identicamente nulla – potrebbe annullarsi in qualche punto; a causa di questi punti, dividere per y_0 non sarebbe lecito. In realtà, risolvendo l'equazione, abbiamo trovato che una soluzione dell'equazione omogenea o è identicamente nulla o è sempre diversa da 0. Questo risultato si può ricavare a priori, ma serve sapere l'unicità di soluzione del problema con condizione iniziale. Infatti sia y (x) una soluzione dell'equazione omogenea che si annulla in un punto x_0, cioè che soddisfa la condizione iniziale $y (x_0) = 0$; anche la soluzione identicamente nulla verifica questa condizione e dunque – se vale l'unicità di soluzione per il problema con condizione iniziale - le due soluzioni devono coincidere. Questo prova che se una soluzione dell'equazione omogenea si annulla in un punto, è sempre nulla; cioè o è identicamente nulla o non si annulla mai.

L'esistenza e l'unicità di soluzione del problema con condizione iniziale possono essere ottenuti a priori, ma in modo non banale: la dimostrazione di questi fatti esula dai limiti del nostro corso.

- **se $y , \bar{y}$ sono due soluzioni dell'equazione completa, la funzione $y - \bar{y}$ è soluzione dell'equazione omogenea e dunque $y = \bar{y} + c\, y_0$**

  Infatti, per ipotesi $y' + a\, y = f$, $\bar{y}' + a\, \bar{y} = f$.

  Sottraendo membro a membro: $(y - \bar{y})' + a (y - \bar{y}) = 0$, da cui l'asserto.

  ☑

- **Principio di sovrapposizione:**

  Data l'equazione y ' + a (x) y = f (x) + g (x), siano

  $y_0 (x)$ soluzione non nulla dell'equazione omogenea

  $\bar{y}_f (x)$ soluzione dell'equazione con termine noto f (x)

  $\bar{y}_g (x)$ soluzione dell'equazione con termine noto g (x).

  Allora, l'integrale generale è dato da

$$\mathbf{y(x) = c\, y_0(x) + \overline{y}_f(x) + \overline{y}_g(x).}$$

Basta provare che $\overline{y}_f + \overline{y}_g$ è soluzione dell'equazione completa.
Per ipotesi

$$\overline{y}_f{}' + a(x)\overline{y}_f = f(x) \quad , \quad \overline{y}_g{}' + a(x)\overline{y}_g = g(x)$$

Sommando membro a membro, si ottiene l'asserto:

$$(\overline{y}_f + \overline{y}_g)' + a(x)(\overline{y}_f + \overline{y}_g) = f(x) + g(x)$$