Funzione integrale

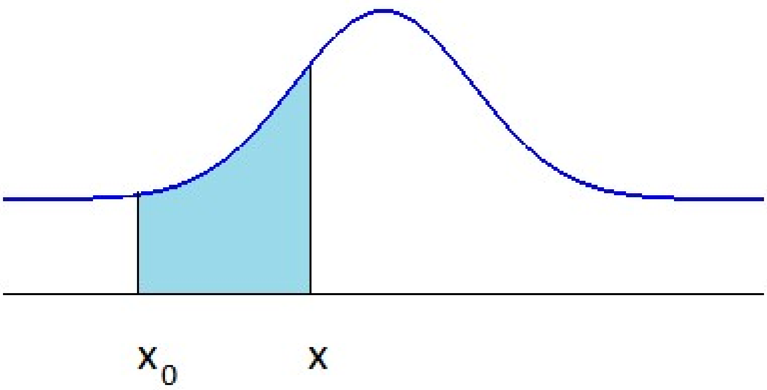
Sia f (x) una funzione integrabile in un intervallo I = [a , b] e sia x_0 un punto di tale intervallo.

La funzione

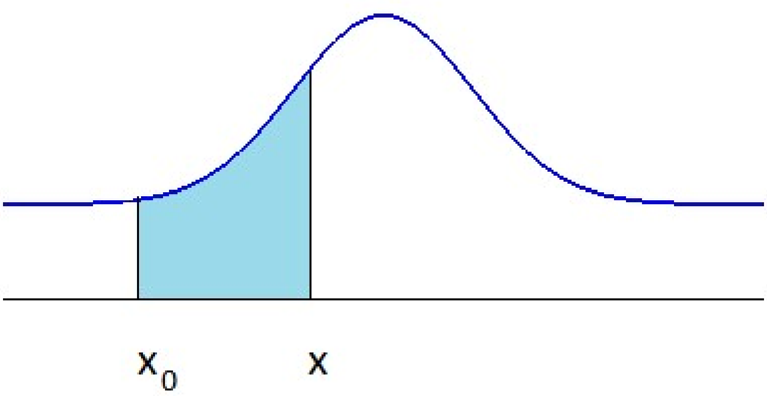
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

si dice funzione integrale di estremo x_0 ; è definita anch'essa in I .

Se f (x) è una funzione positiva e se $x > x_0$, F (x) rappresenta l'area della regione rappresentata nella figura.



Se f (x) è ancora una funzione positiva, ma stavolta $x < x_0$, F (x) rappresenta l'opposto dell'area della regione.



Proprietà delle funzioni integrali

F (x) è continua in I

Proviamo la continuità in un punto $c \in I$

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\, dt \right| =$$

$$\overline{\overline{(*)}} \left| \int_{c}^{x} f(t)\, dt \right| \le \left| \int_{c}^{x} |f(t)|\, dt \right| \le L|x-c|$$

dove L = sup | f (x) | ($L < +\infty$ perché | f | è integrabile in I e dunque è limitata). Passando al limite per $x \to c$, il teorema del confronto assicura che $F(x) \to F(c)$.

In (*) abbiamo utilizzato la maggiorazione del valore assoluto di un integrale con l'integrale del valore assoluto; dato che x può anche essere minore di c, abbiamo messo un ulteriore valore assoluto nel secondo integrale.

☑

Se f (x) è continua , F (x) è derivabile e risulta F '(x) = f (x) , cioè F (x) è una primitiva di f (x).

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\, dt}{h} = f(\xi)$$

con ξ compreso tra x ed x + h (teorema della media integrale per funzioni continue). Per il teorema del confronto e per la continuità della funzione , per $h \to 0$ si ha $f(\xi) \to f(x)$.

☑

Osservazione

Se la funzione f (x) è generalmente continua, la funzione F (x) è continua, mentre l'esistenza della sua derivata è assicurata solo nei punti in cui f (x) è continua .

Ad esempio, data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

si ha

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = |x| .$$

La funzione integrale non è derivabile nel punto x = 0 in cui f è discontinua.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} ,$$

si ha

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = 0 .$$

La funzione integrale stavolta è derivabile anche nel punto 1 in cui f (x) è discontinua, però F ' (1) ≠ f (1).

Osservazione

In particolare, la seconda proprietà della funzione integrale prova **l'esistenza di primitive per funzioni continue.**

Tra tutte le primitive di f (x), F (x) è l'unica che vale 0 per x = x_0.

Esempi:

$$F(x) = \int_0^x \cos t \; dt$$

$F'(x) = \cos x$, $F(0) = 0$

In forma elementare $F(x) = \text{sen}\, x$

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

$F'(x) = 1/x$, $F(1) = 0$

In forma elementare $F(x) = \log x$ (l'integrale ha senso solo se $x > 0$)

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt$$

$F'(x) = e^x / x$, $F(1) = 0$

La funzione **non** ammette rappresentazione elementare.

$$F(x) = \int_e^x \frac{1}{\log t} \, dt$$

$F'(x) = 1/\log x$, $F(e) = 0$

La funzione **non** ammette rappresentazione elementare.

$$f(x) = \begin{cases} \text{sgn}x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} = |x|$$

La funzione integrale è definita su tutto **R,** ma non è una primitiva di f (x), perché F '(0) non esiste.

In questo esempio si osservi che la funzione F (x) è:

- continua
- derivabile eccetto nel punto in cui f (x) non è continua
- primitiva di f (x) in tutti i punti in cui è derivabile.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (versione n.2 - per funzioni continue)

Se f (x) è una funzione continua nell'intervallo [a , b] e g (x) una sua primitiva, allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

dimostrazione

La funzione integrale F (x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f (x). Dato che in un intervallo due primitive differiscono per una costante, deve essere g (x) = F (x) + c per un' opportuna costante c.

Allora:

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \ .$$

Osservazione

Nel teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni integrabili, abbiamo dovuto assumere l'ipotesi di esistenza di una primitiva, cosa che adesso non serve perché abbiamo visto che le funzioni continue ammettono sempre primitive.

Esercizio 1

Studiare la funzione $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

Esercizio 2

Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \int_{x_0}^{\beta(x)} f(t)\,dt$.

Lo stesso per la funzione $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$.

In entrambi i casi la funzione $f(x)$ è continua, le funzioni $\alpha(x)$, $\beta(\xi)$ sono derivabili.