

Integrale definito - Teoria di Riemann

In questa lezione prenderemo in considerazione un secondo tipo di integrale, che chiameremo **integrale definito** per distinguerlo da quello indefinito di cui ci siamo occupati nelle lezioni precedenti.

Come vedremo, il nuovo integrale è un numero, mentre il precedente integrale era una famiglia di funzioni (le primitive). Il fatto che due entità matematiche così diverse siano chiamate entrambe con il nome di integrale fa sospettare che in realtà questi due concetti non siano del tutto estranei l'uno all'altro e che debba esistere tra loro una qualche relazione. Questo legame è fornito dal teorema fondamentale del calcolo integrale, dovuto a Leibniz e Newton: punto di contatto tra calcolo differenziale e calcolo integrale, questo teorema nella sua apparente semplicità rappresenta uno dei principali risultati dell'analisi matematica.

Nella storia dell'analisi sono state date varie definizioni di integrali: da quella più semplice dovuta a Cauchy a quella più raffinata dovuta a Lebesgue, passando attraverso quella di Riemann. La scelta di una teoria piuttosto che un'altra è legato al livello di matematica che si intende (o si deve) usare, tenuto conto del fatto che per funzioni "semplici" (termine che dovremmo precisare) le tre teorie coincidono. Le differenze nascono dal tipo di funzione che si vuole integrare e dall'insieme su cui si vuole integrare, nonché dalle maggiori o minori proprietà che vogliamo sia possedute dall'integrale.

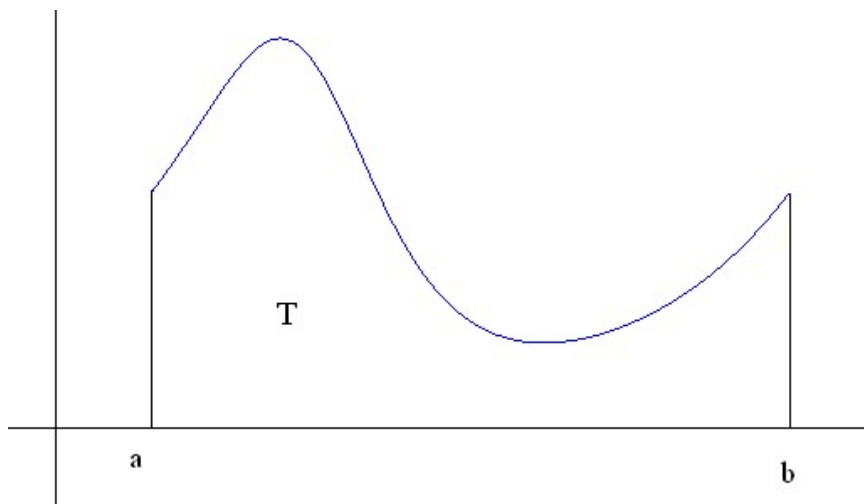
Noi prenderemo in esame la teoria di Riemann, in una versione formale semplificata; sulle dispense si può trovare la teoria nella versione originale. Dal punto di vista sostanziale le due versioni coincidono.

Integrale indefinito $\int f(x) dx = F(x) + c$

è l'insieme delle primitive della funzione

Integrale definito $\int_a^b f(x) dx$

è un numero che **nel caso particolare di funzioni positive** può essere assunto come misura dell'area del trapezoide o sottografico T individuato dalla funzione, ma la cui definizione possa essere estesa al caso generale di funzioni di segno qualunque (in questo caso perdendo l'interpretazione geometrica).



$$T = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

- Si chiama trapezoide, perché se $f(x)$ è una funzione lineare, la regione si riduce ad un trapezio
- Per indicare l'integrale si usa il simbolo \int_a^b introdotto da Leibniz che rappresenta una S, iniziale della parola summa (= somma), perché l'integrale era interpretato come somma di un numero infinito di termini infinitesimali; a e b si dicono estremi di integrazione.
- A differenza di quanto accade per l'integrale indefinito, in quello definito la variabile di integrazione è muta (nel senso che il valore dell'integrale non dipende dalla scelta della variabile).

Ipotesi iniziali

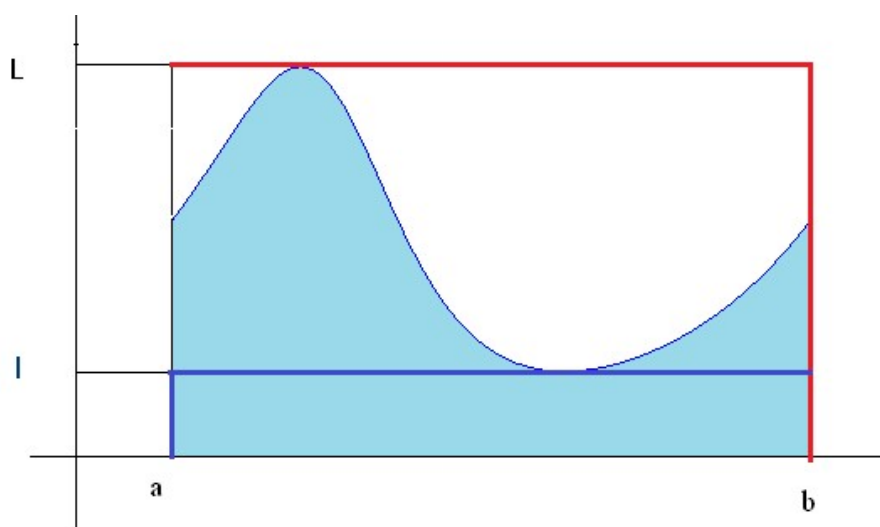
- intervallo $[a , b]$ chiuso e limitato
- $f (x)$ funzione definita nell'intervallo $[a , b]$ e limitata

Supponiamo inizialmente che sia $f (x) \geq 0$ (ipotesi che successivamente rimuoveremo).

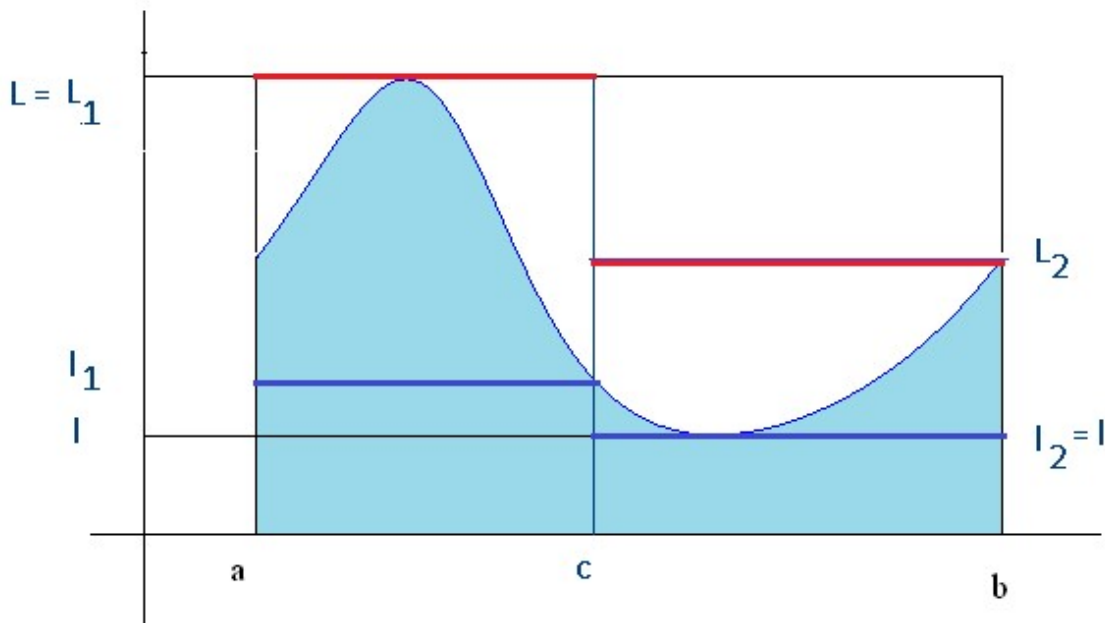
L'area del trapezoide può essere approssimata per eccesso o per difetto dall'area di due rettangoli che hanno come base l'intervallo $[a , b]$ e per altezza il massimo o il minimo della funzione (o se questi non esistono, dato che non abbiamo messo l'ipotesi che la funzione sia continua, l'estremo superiore e quello inferiore, che esistono e sono finiti).

$$S_0 = L (b - a) \quad \text{somma integrale superiore al passo 0}$$

$$s_0 = l (b - a) \quad \text{somma integrale inferiore al passo 0}$$



Preso il punto di mezzo dell'intervallo, ripetiamo l'approssimazione in ciascuno dei due sottointervalli, sostituendo così sia il rettangolo superiore che quello inferiore con due rettangoli.



$$S_1 = L_1 \frac{b-a}{2} + L_2 \frac{b-a}{2} \quad \text{somma integrale superiore al passo 1}$$

$$s_1 = l_1 \frac{b-a}{2} + l_2 \frac{b-a}{2} \quad \text{somma integrale inferiore al passo 1}$$

Confrontando le due figure, si deduce che è:

$$s_0 \leq s_1 \leq S_1 \leq S_0.$$

Nel passaggio da un rettangolo a due rettangoli (ovvero, passando dall'intero intervallo ai due sottointervalli) le due somme approssimano meglio l'area del trapezoide: la somma inferiore lo fa diminuendo, quella inferiore aumentando (decrescenza o crescita vanno intese in senso debole).

Queste definizioni (le somme integrali) si possono scrivere anche per funzioni a segno qualunque, perdendo però l'interpretazione geometrica.

Anche le proprietà di monotonia continuano a valere, perché si basano non sulla geometria ma su proprietà del sup e dell'inf :

- passando da un insieme ad un sottoinsieme, $\inf f$ aumenta , $\sup f$ diminuisce (in senso debole) e lo stesso di conseguenza fanno le somme integrali.

Infatti, siano

$f(x)$ una funzione definita su $A \subset \mathbb{R}$

L_A l'estremo superiore della funzione

$B \subset A$

L_B l'estremo superiore della funzione ristretta a B.

Vogliamo provare che $L_B \leq L_A$.

Se $L_A = +\infty$, non c'è niente da provare.

Se $L_A \neq +\infty$, per definizione di estremo superiore $f(x) \leq L_A \quad \forall x \in A$. Poiché $B \subset A$, è anche vero che $f(x) \leq L_A \quad \forall x \in B$. Dunque L_A è un maggiorante dei valori assunti da $f(x)$ in B; ma poiché L_B è il più piccolo di questi maggioranti, necessariamente $L_B \leq L_A$.

In maniera analoga si ragiona per l'estremo inferiore.

Ciò stabilito, indipendentemente dal segno della funzione :

$$S_1 = L_1 \frac{b-a}{2} + L_2 \frac{b-a}{2} \leq L \frac{b-a}{2} + L \frac{b-a}{2} = S_0 .$$

In maniera analoga (ma opposta) per le somme inferiori.

- l'inf è sempre minore o uguale del sup e quindi la somma inferiore è sempre minore o uguale di quella superiore : $s_n \leq S_n$.

Iterando successivamente il procedimento di bisezioni successive, si costruiscono due **successioni** di somme:

le somme integrali inferiori $s_n = \sum_{k=1}^{2^n} l_k \frac{b-a}{2^n}$

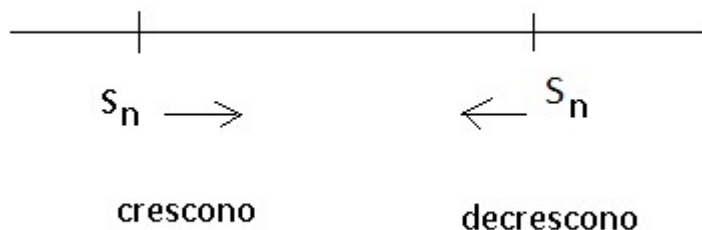
le somme integrali superiori $S_n = \sum_{k=1}^{2^n} L_k \frac{b-a}{2^n} .$

Nel caso di funzioni positive, le prime rappresentano l'area di plurirettangoli inscritti nel trapezoide, le seconde l'area di plurirettangoli circoscritti.



Nel caso di funzioni di segno qualunque, le somme hanno ancora senso, ma perdono il significato di aree.

Indipendentemente dalla loro interpretazione geometrica, e quindi dal segno della funzione, si ha :



Nel caso di funzione positiva, le prime approssimano l'area del trapezoide per difetto, le seconde per eccesso.

Al crescere di n , cioè **all'infittirsi della partizione dell'intervallo** in sottointervalli, l'approssimazione diventa migliore.

Osservazione

Che sia $s_n \leq S_n$ è ovvio; vogliamo provare che è $s_n \leq S_m$ anche per $n \neq m$, cioè tutte le somme integrali inferiori sono minori o uguali di tutte le somme integrali superiori.

Infatti :

se $n > m$ $s_n \leq S_n \leq S_m$ (infatti passando ad una partizione più fine le somme superiori diminuiscono)

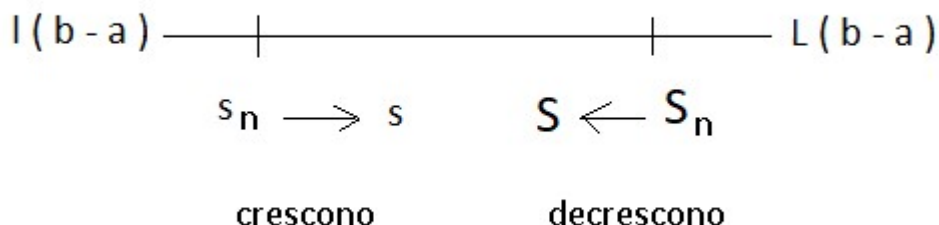
se $n < m$ $s_n \leq s_m \leq S_m$ (infatti passando ad una partizione più fine le somme superiori diminuiscono).

Poiché le due successioni di somme integrali sono monotone e limitate, entrambe hanno limite finito:

$$S_n \rightarrow S \quad s_n \rightarrow s$$

$$l(b-a) \leq s \leq S \leq L(b-a)$$

S ed s sono detti rispettivamente **integrale superiore** e **integrale inferiore**.

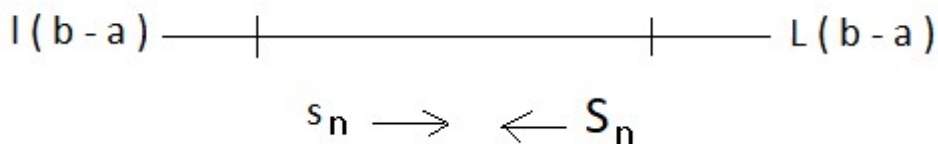


A questo punto possiamo dare le seguenti **definizioni**:

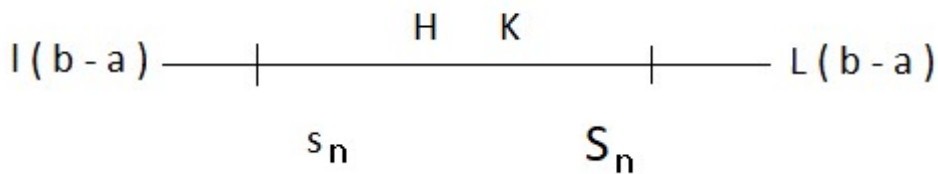
1. La funzione $f(x)$ si dice **integrabile** nell'intervallo $[a, b]$ se $S = s$ (cioè se le due successioni di somme hanno lo stesso limite)
2. Se la funzione è integrabile, si chiama **integrale** $\int_a^b f(x) dx$ il valore comune a integrale superiore ed inferiore (cioè il limite di entrambe le successioni).

In questo caso, l'integrale è l'unico numero che separa le due successioni (**elemento di separazione**).

Che l'integrale sia elemento di separazione è ovvio per come sono state costruite le due successioni.



Che sia l'unico si prova per assurdo:



Se $H < K$ fossero due elementi di separazione, tutti i termini s_n dovrebbero essere minori o uguali ad H , tutti i termini S_n maggiori o uguali a K . Ma allora le due successioni non potrebbero avere lo stesso limite.

Nel caso di funzioni positive questo significa che l'integrale separa le aree di tutti i plurirettangoli circoscritti da quelle di tutti i plurirettangoli inscritti.

Poiché l'area del trapezoide deve avere questa stessa proprietà, è naturale dare la seguente definizione:

3. Se $f(x)$ è una funzione positiva integrabile, definiamo **area del trapezoide** il valore dell'integrale.

Osservazione 1

Abbiamo già osservato che le successioni S_n, s_n formano due insiemi separati.

L'esistenza dell'integrale equivale ad affermare che i due insiemi sono contigui.

f integrabile $\Leftrightarrow S_n, s_n$ formano due insiemi contigui

cioè

S_n, s_n hanno lo stesso limite (necessariamente finito) \Leftrightarrow

S_n, s_n formano due insiemi contigui

L'integrale rappresenta sia il limite comune alle due successioni , sia l'elemento di separazione dei due insiemi di somme integrali.

Dim.

\Rightarrow

Poiché le due successioni hanno lo stesso limite finito, la loro differenza tende a 0; dunque $S_n - s_n < \varepsilon$ definitivamente ; questo prova l'implicazione. Infatti, per provare che i due insiemi sono contigui, basta che la disuguaglianza sia verificata per almeno un n . Inoltre il limite comune L rappresenta l'elemento di separazione, essendo $s_n \leq L \leq S_n \quad \forall n$.

\Leftarrow

All'inverso di quanto visto prima, sapendo che $S_n - s_n < \varepsilon$ è vera per almeno un indice \bar{n} , dobbiamo dedurre che è vera definitivamente.

Questo segue dalla monotonia delle due successioni:

preso un $n > \bar{n}$, si ha $s_{\bar{n}} \leq s_n \leq S_n \leq S_{\bar{n}}$ e quindi $S_n - s_n \leq S_{\bar{n}} - s_{\bar{n}} < \varepsilon$.

Osservazione 2

Di questi due insiemi l'integrale è l'elemento di separazione. Infatti l'elemento di separazione è unico ed il limite ha questa proprietà.

Osservazione

Abbiamo costruito le somme integrali procedendo per bisezioni successive. La sostanza non cambia se, invece che dividere l'intervallo in 2^n sottointervalli di uguale lunghezza, lo dividiamo in n intervalli anche in questo caso tutti con la stessa lunghezza. In realtà, potremmo anche rimuovere l'ipotesi che gli intervalli abbiano la stessa lunghezza (e questo è quello che si fa nella versione originale della teoria di Riemann). Con queste variazioni, però, la parte formale diventa un po' più complicata e soprattutto dobbiamo lasciare l'approccio all'integrale come limite di due successioni e ricorrere a quella che vede l'integrale come elemento di separazione di due insiemi contigui. Tralasciamo i dettagli di questa osservazione (che comunque si possono trovare sul libro di riferimento).

Esistono funzioni integrabili.

Ad esempio, le funzioni costanti, per le quali risulta $\int_a^b k \, dx = k(b-a)$.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Interpretazione geometrica del risultato: l'area dei rettangoli misurata a partire dall'integrale coincide con quella elementare. Ma allora lo stesso accade per i triangoli (perché l'area di un triangolo è equivalente a metà area di un opportuno rettangolo) e per i poligoni (perché ogni poligono si può scomporre in un numero finito di triangoli). Rimane da far vedere che lo stesso accade anche per i cerchi: questo risultato sarà ottenuto più avanti.

Esistono funzioni non integrabili.

Ad esempio, la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [a, b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esempi di funzioni integrabili (teoremi)

- le funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$
- le funzioni generalmente continue nell'intervallo $[a, b]$ (cioè continue eccetto un numero finito di punti e limitate)

Questi esempi non esauriscono la classe delle funzioni integrabili: esistono anche funzioni integrabili discontinue in un insieme infinito di punti. La caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann è stabilita dal teorema di Vitali-Lebesgue che introduce il concetto di insieme di misura nulla.

Esercizio

In base alle informazioni precedenti dire quale dei seguenti integrali esistono nella teoria di Riemann e quali no.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\int_0^1 \sin(1/x) dx \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Proprietà dell'integrale

1. Linearità

f, g integrabili, $k \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, k f$ integrabili.

In altre parole, la somma di due funzioni integrabili è integrabile, il prodotto di una funzione integrabile per un numero è integrabile. Si sintetizzano questi risultati dicendo che l'insieme delle funzioni integrabili in un dato intervallo $[a, b]$ è uno spazio vettoriale.

Inoltre valgono le uguaglianze:

$$\int_a^b (f + g) \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_a^b g \, dx$$

$$\int_a^b k f \, dx = k \int_a^b f \, dx$$

cioè, l'integrale di una somma è la somma degli integrali, l'integrale del prodotto di una funzione per un numero è il prodotto dell'integrale di questa funzione per il numero. Si sintetizza questo risultato dicendo che l'applicazione $f \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx$ è lineare.

2. Positività

$$f \text{ integrabile, } f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$$

$$f \text{ integrabile, } f(x) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx > 0$$

f integrabile, $f(x) > 0$ tranne al più in un numero finito di punti

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx > 0$$

3. Monotonia

$$\mathbf{f, g \text{ integrabili, } f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx}$$

$$\mathbf{f, g \text{ integrabili, } f < g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx}$$

f, g integrabili, f < g tranne al più un numero finito di punti

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

4. Additività rispetto all'intervallo

Sia $c \in (a, b)$; allora

f integrabile in [a, b] \Leftrightarrow f integrabile in [a, c] e in [c, b]

Inoltre :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad .$$

Definizioni

Se $\beta > \alpha$ **definiamo** $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

Se $\beta = \alpha$ **definiamo** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$.

Sia $f(x)$ una funzione integrabile in un intervallo I e siano a, b, c tre punti qualunque di tale intervallo. Tenendo conto delle definizioni precedenti, continua a valere:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad .$$

5. Media integrale

Se f è integrabile in un intervallo $[a, b]$, posto $l = \inf f$, $L = \sup f$, si ha :

$$l (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq L (b - a)$$

Infatti $l (b - a)$ ed $L (b - a)$ sono rispettivamente la somma integrale inferiore e superiore al passo 0 e l'integrale è l'elemento di separazione di tutte le somme integrali. Al rapporto

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

si dà il nome di **media integrale** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$: il risultato precedente prova che la media integrale è un numero compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione nell'intervallo di integrazione.

Se $f(x)$ è continua, il teorema dei valori intermedi assicura che nell'intervallo $[a, b]$ la funzione assume tutti i valori compresi l ed L , in particolare dunque

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi)$$

ovvero

$$\exists \xi \in (a, b) : \int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a) .$$

A questo risultato diamo il nome di **teorema della media integrale per funzioni continue**.

6. Valore assoluto

$$f \text{ integrabile} \Rightarrow |f| \text{ integrabile} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Esercizio:

1. Una funzione nulla nell'intervallo $[a, b]$ eccetto un punto è integrabile ed ha integrale nullo.
2. Una funzione nulla nell'intervallo $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti è integrabile ed ha integrale nullo.
3. Modificando una funzione in un numero finito di punti, non cambia l'integrabilità della funzione né eventualmente il valore del suo integrale.

Schema di dimostrazione

1. Supponiamo ad esempio che sia $f(x_0) > 0$. Al variare di n , questo punto sta sempre in uno solo dei sottointervalli di volta in volta costruiti o al più in due di questi sottointervalli (quando è il secondo estremo di un intervallo e il primo di quello successivo). Dedurre che le somme S_n valgono $f(x_0)(b-a)/2^n$ o $2f(x_0)(b-a)/2^n$, mentre le somme s_n sono nulle. Il limite comune alle due successioni è 0.
2. La funzione si può scrivere come somma di un numero finito di funzioni nulle eccetto che in un punto (uno per ciascuna di queste funzioni). Tenere conto delle proprietà dell'integrale e del risultato precedente.
3. La differenza tra la funzione data e quella ottenuta modificandola in un numero finito di punti è una funzione del tipo indicato al passo precedente.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$ e sia $G(x)$ una sua primitiva in tale intervallo .

Allora :

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) .$$

dimostrazione

Al passo n-esimo della costruzione delle somme integrali, l'intervallo è diviso in 2^n sottointervalli di ampiezza $\Delta = (b - a) / 2^n$ dai punti $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{2^n} = b$.

Utilizzando questi punti, si può scrivere

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{2^n} [G(x_k) - G(x_{k-1})]$$

(perché nella sommatoria i termini si semplificano a due a due , eccetto il primo e l'ultimo)

$$= \sum_{k=1}^{2^n} G'(\xi_k) \frac{b-a}{2^n}$$

(per il teorema di Lagrange, essendo ξ_k un opportuno punto dell'intervallo k-esimo)

$$= \sum_{k=1}^{2^n} f(\xi_k) \frac{b-a}{2^n}$$

(perché G è una primitiva di f) .

Poiché $l_k \leq f(\xi_k) \leq L_k$, la somma trovata è compresa tra la somma integrale inferiore e quella superiore al passo n-esimo:

$$s_n \leq \sum_{k=1}^{2^n} f(\xi_k) \frac{b-a}{2^n} \leq S_n$$

e dunque

$$s_n \leq G(b) - G(a) \leq S_n.$$

Dunque, data l'arbitrarietà di n, il numero $G(b) - G(a)$ è compreso tra ogni somma integrale inferiore e ogni somma integrale superiore. Ma, essendo f integrabile, l'integrale è l'unico numero ad avere questa proprietà; dunque, necessariamente deve essere :

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Osservazione 1

Il teorema assume due ipotesi sulla funzione $f(x)$:

- che sia integrabile in $[a, b]$
- che ammetta primitive in tale intervallo.

Queste due ipotesi non si implicano a vicenda : esistono funzioni integrabili che non ammettono primitive ed esistono funzioni dotate di primitive che non sono integrabili.

Ad esempio :

1. la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{se } x \in [-1, 1] - \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è integrabile in $[-1, 1]$ (perché è generalmente continua), ma non ammette primitive in tale intervallo .

2. la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile e risulta

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x^2) - (2/x) \cos(1/x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Restringiamo le funzioni all'intervallo $[-1, 1]$ (per fissare le idee); in questo intervallo la funzione $f'(x)$ ammette primitive ($f(x)$ è una di queste), ma non è integrabile (in quanto la presenza del termine $2/x$ la rende non è limitata).

Osservazione 2

Poiché in $[a, b]$ le primitive della funzione $f(x)$ differiscono per una costante, la differenza $G(b) - G(a)$ non dipende dalla particolare primitiva scelta .

Osservazione 3

Supponiamo di voler calcolare

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

la cui esistenza è assicurata dalla continuità della funzione integranda nell'intervallo fissato. Con la sostituzione $\operatorname{tg} x = t$ si trova:

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c .$$

Posto

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x),$$

sarebbe sbagliato pretendere di applicare il teorema fondamentale nella forma

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \varphi(\pi) - \varphi(0) = 0$$

e d'altra parte il risultato a cui arriveremmo sarebbe assurdo : essendo $f(x) > 0$, il suo integrale non può essere nullo.

L'errore sta nell'aver utilizzato la funzione $\varphi(x)$ come primitiva nell'intero intervallo di integrazione, cosa che non è vera, dato che $\varphi(x)$ per $x = \pi/2$ non è nemmeno definita.

L'informazione contenuta nel calcolo dell'integrale indefinito deve essere intesa in senso corretto : le primitive cercate hanno la forma

$$G(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \alpha & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \varphi(x) + \beta & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

dove α e β sono costanti arbitrarie indipendenti. Si ricordi infatti che le primitive sono date a meno di una costante arbitraria in ogni **intervallo** in cui sono definite; nel caso che stiamo esaminando gli intervalli sono due, tra loro disgiunti.

Prolunghiamo per continuità $G(x)$ per $x = \pi/2$: poiché risulta

$$\text{per } x \rightarrow \pi/2^- \quad G(x) \rightarrow \pi/(2\sqrt{2}) + \alpha$$

$$\text{per } x \rightarrow \pi/2^+ \quad G(x) \rightarrow -\pi/(2\sqrt{2}) + \beta$$

dobbiamo imporre che sia

$$\beta = \pi/\sqrt{2} + \alpha.$$

Le funzioni

$$G(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \alpha & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \varphi(x) + \pi/\sqrt{2} + \alpha & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

così ottenute sono anche derivabili per $x = \pi/2$:

$$\text{per } x \rightarrow \pi/2^{\pm} \quad G'(x) = f(x) \rightarrow f(\pi/2).$$

Abbiamo in tal modo ottenuto le primitive della funzione $f(x)$ nell'intervallo considerato ; il loro utilizzo nel teorema fondamentale fornisce il corretto valore dell'integrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \varphi(\pi) + \pi/\sqrt{2} - \varphi(0) = \pi/\sqrt{2} .$$

Integrale per sostituzione, cambiamento di variabile, parti

Il teorema fondamentale trasforma le regole di integrazione indefinita in regole di integrazione :

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx =$$

$$= f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Abbiamo già visto come dare significato gli integrali a secondo membro anche nel caso in cui il primo estremo non sia minore del secondo.

Area del cerchio

Per motivi di simmetria, consideriamo il quarto di cerchio situato nel primo quadrante e delimitato dal grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

e dall'asse delle x , per $0 \leq x \leq R$. Allora:

$$A = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Si pone $x = R \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, ottenendo:

$$= 4 R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4 R^2 \left[\frac{t + \sin t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi R^2$$

Altri esempi

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \\ & = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \pi/2 + [\cos x]_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ & = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} [\log|t|]_1^2 = (\log 2)/2 \end{aligned}$$

Si è posto $t = 1 + x^2$.

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx \\ & = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = 2 [t^3/3 - t]_1^{\sqrt{2}} = 2(2 - \sqrt{2})/3 \end{aligned}$$

Si è posto $\sqrt{1+x} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t \, dt$

$$4. \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^0 \sqrt{t} dt = 0$$

Si è posto $1 - x^2 = t$, $-2x dx = dt$.

Funzioni pari , dispari , periodiche

Sia $f(x)$ una funzione integrabile in $[-a, a]$.

$$\text{Se } f \text{ è pari , } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{Se } f \text{ è dispari , } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

dimostrazione

Nell'integrale $\int_{-a}^0 f(x) dx$ poniamo $t = -x$, ottenendo:

$$\int_a^0 -f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt .$$

Dunque, se f è pari

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(t) dt$$

mentre se f è dispari

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(t) dt$$



Sia $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ una funzione integrabile di periodo T ; l'integrale

$$\int_a^{a+T} f(x) dx$$

non dipende da a ; in altre parole, l'integrale di f è lo stesso in ogni intervallo di ampiezza il periodo.

dimostrazione

Utilizzando l'additività rispetto all'intervallo, si ottiene:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{a+T} f(x) dx \quad (*)$$

Nell'integrale $\int_a^0 f(x) dx$ poniamo $x + T = t$, si ottiene:

$$\int_a^0 f(x) dx = \int_{a+T}^T f(t-T) dt = \int_{a+T}^T f(t) dt .$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della periodicità della funzione.

Sostituendo in (*):

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{a+T}^T f(x) dx + \int_0^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx .$$

