La formula di Taylor con il resto di Peano

Abbiamo dimostrato che le funzioni derivabili in un punto x_0 sono tutte e sole quelle differenziabili nel punto, cioè quelle per cui vale l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

dove il termine $o(x - x_0)$ indica un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$. Abbiamo interpretato questo risultato dicendo che è possibile approssimare la funzione $f(x)$ con un polinomio di primo grado (se $f'(x_0) \neq 0$) , il cui grafico è la retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0. In questa approssimazione si compie un <u>errore</u>, intendendo con questo termine la differenza tra la funzione e il polinomio (ovviamente la differenza è nulla nel punto x_0): abbiamo valutato questo errore nella forma $o(x - x_0)$. L'errore è tanto più piccolo e quindi l'approssimazione è tanto migliore quanto più x è vicino a x_0: parleremo in questo senso di approssimazione locale.

Il polinomio $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ha le seguenti proprietà :

- $P(x_0) = f(x_0) \;,\quad P'(x_0) = f'(x_0)$

ed anzi è l'unico polinomio di grado ≤ 1 ad avere questa proprietà.

E' immediato verificare che il polinomio verifica queste proprietà.
Per verificare che è l'unico polinomio di grado ≤ 1 a soddisfare questa proprietà, partiamo dal generico polinomio di primo grado $Q(x) = a(x - x_0) + b$, imponiamo che verifichi le condizioni precedenti e calcoliamo i corrispondenti valori per a e b: il polinomio che deduciamo con questi calcoli coincide con $P(x)$.

- E' l'unico polinomio di grado ≤ 1 che approssima la funzione con un errore che è un $o(x - x_0)$.

Supponiamo che $Q(x)$ sia un polinomio di grado ≤ 1 che approssima $f(x)$ a meno di $o(x - x_0)$:

$$f(x) = P(x) + o(x - x_0) = Q(x) + o(x - x_0)$$

Dunque

$$P(x) - Q(x) = o(x - x_0) - o(x - x_0) = o(x - x_0) \;.$$

Dobbiamo far vedere che P (x) – Q (x) è identicamente nullo.
Sia P (x) – Q (x) = $a_0 + a_1 (x – x_0)$. Il coefficiente a_0 deve essere nullo, altrimenti il polinomio non sarebbe infinitesimo. Anche a_1 deve essere nullo, altrimenti il polinomio si ridurrebbe alla forma $a_1 (x – x_0)$ e sarebbe un infinitesimo del primo ordine e non di ordine superiore come invece vogliamo che sia.

La formula di Taylor permette di migliorare il risultato, approssimando la funzione con polinomi di grado superiore al primo. In questa prospettiva la formula del differenziale diventa la formula di Taylor al primo ordine ovvero di grado 1.

Per ottenere questo risultato, consideriamo la differenza tra la funzione e il polinomio di primo grado che l'approssima:

$$f (x) - f (x_0) – f' (x_0) (x - x_0).$$

Se confrontiamo questa funzione con $x – x_0$, sappiamo già che per $x \to x_0$ il rapporto tende a 0; confrontiamola adesso con la potenza intera successiva: il limite di

$$\frac{f (x) - f (x_0) - f '(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

si presenta nella forma indeterminata 0/0: vogliamo calcolarlo applicando il teorema dell'Hôpital. Il denominatore e la sua derivata si annullano solo nel punto x_0 ; del numeratore sappiamo solo che è derivabile in x_0 (che è giusto l'unico punto che non interessa) : dobbiamo dunque aggiungere che f (x) sia derivabile in tutto un intorno del punto (x_0 compreso). Una prima applicazione del teorema porta a calcolare il limite di :

$$\frac{f '(x) - f '(x_0)}{2 (x - x_0)} \quad .$$

A parte il coefficiente , questo è il rapporto incrementale della funzione f' (x) nel punto x_0 e dunque

$$\frac{f '(x) - f '(x_0)}{2 (x - x_0)} \to f ''(x_0)$$

purché la derivata seconda esista.

Dunque

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \to \frac{f''(x_0)}{2}$$

cioè

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - \frac{f''(x_0)}{2} = o(1)$$

ed infine

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2 \ .$$

In questo modo la funzione è stata approssimata con un polinomio P (x) di secondo grado in $x - x_0$ con un errore valutato nella forma $o(x - x_0)^{2.}$
Le ipotesi fatte per arrivare a questo risultato sono state : f derivabile in un intorno di x_0 , f derivabile due volte nel punto. Dato che $f''(x_0)$ è il limite del rapporto incrementale di $f'(x)$, l'esistenza di $f''(x_0)$ che implica anche quella di $f'(x)$ in un intorno di x_0 .

Si osservi che il polinomio P (x) soddisfa le condizioni:

$$P(x_0) = f(x_0) \ , \ P'(x_0) = f'(x_0) \ , \ P''(x_0) = f''(x_0)$$

ed anzi è l'unico polinomio di grado ≤ 2 a soddisfarle (la verifica è analoga a quella precedente). Analogamente si prova che P (x) è l'unico polinomio di grado ≤ 2 che approssima la funzione a meno di $o(x - x_0)^2$.

Sotto l'ipotesi che esista $f'''(x_0)$ (e quindi che esista $f''(x)$ in un intorno di x_0), si può iterare il procedimento: alla forma indeterminata:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^3}$$

si applica il teorema dell'Hôpital, ottenendo prima

$$\frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{3(x-x_0)^2}$$

e successivamente

$$\frac{f''(x) - f''(x_0)}{6(x-x_0)} \rightarrow \frac{f'''(x_0)}{6}$$

(nell’ultimo passaggio la funzione ottenuta è, a parte il coefficiente 6, il rapporto incrementale in x_0 della funzione f "). Dunque:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - f''(x_0)/2\ (x-x_0)^2}{(x-x_0)^3} -$$

$$- \frac{f'''(x_0)}{3!} = o(1)$$

ovvero

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o(x-x_0)^3$$

Possiamo riscrivere questo risultato in una forma più breve, utilizzando il simbolo di sommatoria

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^3$$

dove

$f^{(k)}(x_0)$ indica la derivata k – esima ; ma $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Il polinomio di terzo grado ottenuto soddisfa le seguenti condizioni

$P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$

$P''(x_0) = f''(x_0)$, $P'''(x_0) = f'''(x_0)$

ed anzi è l'unico polinomio di grado ≤ 3 con questa proprietà. Inoltre quello trovato è l'unico ad approssimare f (x) a meno di $0(x - x_0)^3$.

In generale vale il seguente risultato:

- **Teorema della formula di Taylor con resto di Peano**

  Sia f una funzione definita in un intervallo I contenente il punto x_0 e derivabile n volte in tale punto (e quindi n - 1 volte in un intorno del punto). Il polinomio

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

  approssima localmente la funzione a meno di un infinitesimo di ordine superiore ad $(x - x_0)^n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

  Questo risultato viene detto formula di Taylor di punto iniziale x_0 e ordine n con il resto (cioè l'errore) scritto nella forma di Peano.

<u>dimostrazione</u>

La dimostrazione utilizza il principio di induzione.

Passo base

Come passo base possiamo prendere n = 1 (in questo caso la formula di Taylor coincide con quella del differenziale per funzioni derivabili) ; in alternativa potremmo anche prendere n = 0 (in questo caso la formula diventa $f(x) = f(x_0) + o(1)$, che esprime la continuità della funzione).

Passo induttivo

Per provare l'induttività, supponiamo vero il teorema per un certo n e deduciamo che è vero per n + 1.
A questo scopo indichiamo con $E_n(x)$ ed $E_{n+1}(x)$ rispettivamente l'errore al passo n-esimo e quello al passo (n + 1)-esimo di una funzione con il suo polinomio di Taylor di punto iniziale x_0 e grado rispettivamente n ed n + 1 , cioè

$$E_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$E_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ .$$

Per ipotesi $E_n = o(x - x_0)^n$ <u>per ogni funzione opportunamente regolare</u>; dobbiamo provare che $E_{n+1} = o(x - x_0)^{n+1}$.

Il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

si presenta nella forma indeterminata 0 / 0: applicando il teorema dell'Hôpital, si ottiene:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{n+1}'(x)}{(n+1)(x - x_0)^n} \ .$$

D'altra parte

$$E_{n+1}'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1}$$

(il termine con k = 0 è un numero , dunque la sua derivata è nulla) ovvero, ponendo k – 1 = h

$$E_{n+1}' = f'(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h+1)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h$$

cioè

$$E_{n+1}' = f'(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f'^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h .$$

Questo è il resto n-esimo per la funzione f ' e dunque per ipotesi è un $o(x-x_0)^n$.

Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{E_{n+1}'(x)}{(n+1)(x-x_0)^n} = 0$$

cioè

$$E_{n+1}(x) = o(x-x_0)^{n+1}.$$

Osservazioni

1. Al passo n-esimo il polinomio ha grado ≤ n , non necessariamente = n.

Ad esempio, poiché $\lim_{x\to 0} \frac{\text{senx} - x}{x^2} = 0$, si ottiene senx = x + o (x^2). Dunque al passo n = 2 il polinomio di Taylor ha grado 1.

2. **Il polinomio di Taylor è l'unico polinomio di grado n che approssima la funzione a meno di un $o(x-x_0)^n$.**

dimostrazione

Se

$$f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n = Q_n(x) + o(x-x_0)^n,$$

si ha $P_n(x) - Q_n(x) = o(x-x_0)^n$.

Poniamo $P_n(x) - Q_n(x) = C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k$.

Ma questo polinomio o è nullo (e allora è o $(x - x_0)^n$) oppure al massimo è un infinitesimo di grado n (quando tutti i coefficienti sono nulli eccetto l'ultimo). Ovviamente , dire che C_n è nullo equivale a dire che è $P_n = Q_n$.

3. La formula di Taylor si costruisce a partire dai valori delle derivate successive della funzione nel punto iniziale x_0 . Viceversa, conoscendo la formula di Taylor di una funzione (e , come vedremo , questa si può ottenere anche senza partire dalla definizione) possiamo dedurre il valore delle derivate nel punto iniziale.

   Se per una funzione **derivabile n volte** si trova l'approssimazione $f (x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + o ((x - x_0)^n)$, allora il polinomio trovato è quello di Taylor e da questo si possono dedurre le derivate della funzione: $f (x_0) = a_0$, $f ' (x_0) = a_1$, $f '' (x_0) = 2 a_2$, …… , $f^{(n)} (x_0) = n!\, a_n$.

   Ad esempio , se $f (x) = 1 + 2x - 3 x^2 + o (x^2)$, allora
   (i) $f (0) = 1$
   (ii) $f' (0) = 2$
   (iii) $f'' (0) / 2 = - 3$, cioè $f '' (0) = - 6$.

4. Nel punto x_0 la funzione $f (x)$ e il polinomio di Taylor $P_n (x)$ coincidono fino alla derivata n-esima:
   $f (x_0) = P_n (x_0)$, $f ' (x_0) = P_n' (x_0)$, ….. , $f^{(n)} (x_0) = P_n^{(n)} (x_0)$.

5. Spesso la formula di Taylor di punto iniziale 0 è detta formula di Mac Laurin.

Calcolo di polinomi di Taylor (di punto iniziale $x_0 = 0$)

- **usando la definizione** (cioè calcolando le derivate successive della funzione)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\text{sen}\, x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$$

In generale :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!} \quad \text{se } k \neq 0$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

- **per sostituzione**

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \; x^k + o(x^n)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) .$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + + x^n + o(x^n) .$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots + \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1.3.5....(2k-3)}{2.4.6...(2k)} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \ldots.. + \sum_{k=3}^{n} (-1)^k \frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...(2k)} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \ldots.. + \sum_{k=3}^{n} \frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...(2k)} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \; x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

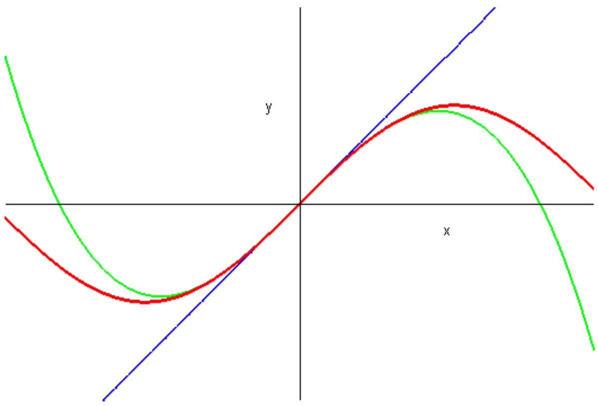
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) .$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n+1})$$

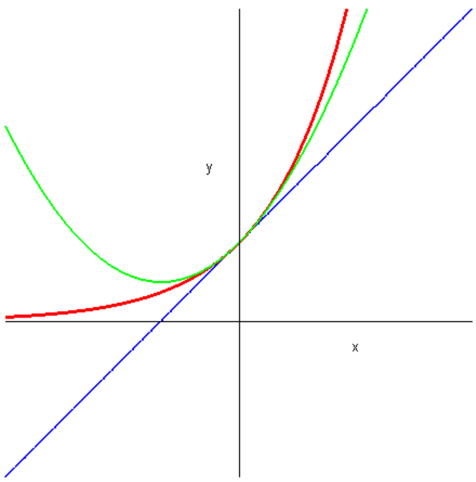
$$a^x = e^{x \log a} = 1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} \log^2 a + \ldots + \frac{x^n}{n!} \log^n a + o(x^n)$$

Approssimazione di senx



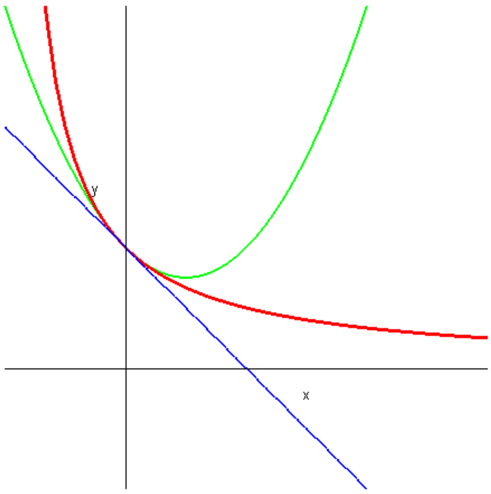
in rosso la funzione, in azzurro l'approssimazione al primo ordine, in verde quella al terzo ordine

Approssimazione di e^x



in rosso la funzione, in azzurro l'approssimazione al primo ordine, in verde quella al secondo ordine

Approssimazione di 1 / 1 + x



in rosso la funzione, in azzurro l'approssimazione al primo ordine, in verde quella al secondo ordine

- **per somma e per prodotto per un numero**

Semplicemente si sommano i polinomi o si moltiplica il polinomio per il numero.

- **per derivazione**

Conoscendo l'approssimazione di senx , per derivazione si ricava quella di cosx

$$\mathbf{sen\,x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

- **per integrazione**

Conoscendo l'approssimazione $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \; x^k + o(x^n)$, da questa si deduce quella di log (1 + x):

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

Ovvero , ponendo k + 1 = h

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{h-1} \frac{x^h}{h} + o(x^{n+1})$$

Esplicitamente, fermandoci all'ordine n :

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Attenzione: poiché l'integrazione è ottenuta a meno di una costante arbitraria, questa va calcolata esplicitamente, assegnandole il valore della funzione nel punto iniziale (in questo caso 0).

Dal risultato precedente per sostituzione si ottiene :

$$\mathbf{\log_a(1+x) = \frac{\log(1+x)}{\log a} = \frac{1}{\log a}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\right) + o(x^n)}$$

- **arctg x = x - x^3 / 3 + x^5 / 5 + ……**

Partiamo dalla funzione 1 / (1 + x^2) ; il suo sviluppo di Taylor si ottiene prima da quello di 1 / (1 + x) cioè da $(1+x)^{-1}$ e poi sostituendo x con x^2 .

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \; x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) \,.$$

Per integrazione :

$$\operatorname{arctgx} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x - x^3/3 - x^5/5 + \ldots..$$

Poiché arctg (0) = 0 , la costante additiva anche in questo caso è nulla.

- **arcsen x = x + x^3 / 6 + 3 x^5 / 40 + …..**

Partiamo dalla funzione $1/\sqrt{1-x^2}$; il suo sviluppo di Taylor si ottiene prima da quello di $1/\sqrt{1+x}$ cioè da $(1+x)^{-1/2}$ e poi sostituendo x con $-x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \ldots.. + \sum_{k=3}^{n} \frac{1.3.5\ldots.(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

Per integrazione :

$$\operatorname{arcsenx} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \ldots.. + \sum_{k=3}^{n} \frac{1.3.5\ldots.(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Anche in questo caso la costante additiva è nulla.

- **arcos x = π/2 - x - x^3 / 6 - 3 x^5 / 40 + …..**

Il modo più semplice per ottenere il risultato sta nel ricordare che arccosx = π/2 – arcsenx.

In alternativa si può partire dallo sviluppo di - $1/\sqrt{1-x^2}$ e procedere come sopra; ovviamente troveremo il risultato precedente , ma cambiato di segno. Stavolta però arccos 0 = π/2 e questo dà il valore della costante additiva.

- **per prodotto**

Il polinomio di Taylor di punto iniziale x_0 e grado n per la funzione f (x) g (x) si ottiene moltiplicando gli analoghi polinomi delle due funzioni e prendendo solo le potenze minori o uguali ad n .

Ad esempio , cerchiamo il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e grado 5 per le funzioni $\text{sen}^2 x$:

$$\text{sen}^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

Per la funzione $\cos^2 x$ si può procedere in modo analogo, oppure più semplicemente si può scrivere :

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

- **per rapporto**

Illustriamo il risultato generale con un esempio : supponiamo di voler calcolare il polinomio di punto iniziale 0 e grado 5 per la funzione tg x = sen x / cos x :

$$\text{tg}\, x = \text{sen}\, x / \cos x = \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)}{1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)}$$

Ricordando che

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots.$$

si ottiene

$$\frac{1}{1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)} =$$

$$= 1 - (- x^2/2 + x^4/24) + (x^4/4) + o(x^5) =$$

$$= 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^5).$$

Dunque

tg x =

$$= (x - x^3/6 + x^5/120)(1 + x^2/2 + 5x^4/24) + o(x^5) =$$

$$= x + x^3/3 + 2x^5/15 + o(x^5).$$

- **per composizione**

Vogliamo trovare il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e grado n per la funzione composta $f(\varphi(x))$.

Se $\varphi(0)$ **= 0** :

- calcoliamo il polinomio di Taylor per $\varphi(x)$ di grado n e punto iniziale 0; indichiamolo con $Q_n(x)$
- calcoliamo il polinomio di Taylor di f (t) di grado n e punto iniziale 0 ; indichiamolo con $P_n(t)$
- scriviamo $P_n(t)$ sostituendo al posto di t il polinomio $Q_n(x)$, cioè scriviamo la funzione composta $P_n(Q_n(x))$, limitandoci alle potenze fino all'ordine n (le altre confluiscono nel resto di Peano).

  Esempio
  Calcoliamo per la funzione sen tg x il polinomio di punto iniziale 0 e grado 5 .
  Si ha successivamente :

$$\text{tg}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\text{sen}\, t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^5)$$

$$\text{sentgx} = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right)^3 +$$

$$+ \frac{1}{120} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right)^5 + o(x^5)$$

Tenendo conto che le potenze di x successive alla quinta sono inglobate nel resto , possiamo scrivere :

$$\text{sen tg } x = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right) - \frac{1}{6} (x^3 + x^5) + \frac{1}{120} x^5 + o(x^5) =$$

$$= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5).$$

Attenzione:

proviamo ad approssimare sen (cosx) con $x_0 = 0$ ed $n = 3$.

Per prima cosa approssimiamo cosx: sen ($1 - x^2/2 + o(x^3)$).

A questo punto sarebbe sbagliato proseguire , utilizzando l'approssimazione di senx con $x_0 = 0$ che conosciamo, perché stavolta l'argomento del seno **non si annulla** per $x = 0$.

Per utilizzare le approssimazioni note, possiamo ricordare la formula trigonometrica di addizione : sen (a + b) = sena cosb + cosa senb , ottenendo :

sen1 cos ($- x^2/2 + o(x^3)$) + cos1 sen ($- x^2/2 + o(x^3)$).

Adesso i due argomenti si annullano per $x = 0$ e quindi possiamo utilizzare le approssimazioni note :

sen1 (1) + cos1 ($-x^2/2 + o(x^3)$) = sen1 – (cos1) $x^2 / 2 + o(x^3)$.

In questo caso particolarmente semplice possiamo anche considerare la funzione $f(x) = \text{sen}(1 + x)$ e approssimarla nell'intorno di 0 utilizzando la definizione:

poiché $f(0) = \text{sen}1$, $f'(0) = \cos 1$, si ottiene

$\text{sen}(1 + x) = \text{sen}1 + x \cos 1 + o(x)$

da cui ritroviamo

$\text{sen}(1 - x^2/2 + o(x^3)) = \text{sen}1 - (\cos 1)\, x^2/2 + o(x^3)$.

Esempi di applicazioni della formula di Taylor

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + 5x^4}{\log(1 + x^2) - x^2}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - 1 - x^2 + 5x^4 = 11\, x^4/2 + o(x^4)$$

$$\log(1 + x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$$

$$\log(1 + x^2) - x^2 = -x^4/2 + o(x^4)$$

Sostituendo, si ottiene:

$$\frac{11x^4/2 + o(x^4)}{-x^4/2 + o(x^4)}$$

e quindi il limite vale - 11.

2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\; e^{x}}{x e^{x} - \log(1+x^{2})}$$

$\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 + o(x^2)$ $\qquad\qquad$ $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$

$\sqrt{1+x^2}\; e^x = 1 + x + o(x)$

$x e^x = x + x^2 + o(x^2)$ $\qquad\qquad$ $\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$

$x e^x - \log(1+x^2) = x + o(x)$

Possiamo sostituire la funzione data con $-x / x$, tralasciando gli infinitesimi di ordine superiore; il limite vale -1.
Più semplicemente, approssimando al primo ordine ……..

3.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(x^{2} - 2x + 2)}{e^{x} - e}$$

Con il cambiamento di variabile t = x - 1, si ottiene:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t^{2})}{e(e^{t} - 1)}$$

Sostituendo gli infinitesimi che deduciamo dalla formula di Taylor (in realtà bastano quelli che già avevamo dedotto dai limiti notevoli), si ottiene t^2 / et e dunque il limite vale 0.

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x^3}{\cos^3 x - \cos x^3}$$

$$\operatorname{sen}^3 x = (x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5))^3 = x^3 - x^5/2 + o(x^5)$$

$$\operatorname{sen} x^3 = x^3 + o(x^5)$$

$$\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x^3 = - x^5/2 + o(x^5)$$

$$\cos^3 x = (1 - x^2/2 + o(x^3))^3 = 1 - 3x^2/2 + o(x^3)$$

$$\cos x^3 = 1 - x^6/2 + o(x^6)$$

$$\cos^3 x - \cos x^3 = -3x^2/2 + o(x^3)$$

Sostituendo numeratore e denominatore con le parti principali trovate, si ottiene che il limite vale 0.

5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1-4x^2} - 1 + 2x^2}$$

$$\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^4)$$

$$(x - \operatorname{tg} x)(x + \operatorname{tg} x) = (-x^3/3 + o(x^4))\,(2x + x^3/3 + o(x^4)) =$$

$$= -2x^4/3 + o(x^4)$$

$$\sqrt{1-4x^2} = 1 + \frac{1}{2}(-4x^2) - \frac{1}{8}(16x^4) + o(x^4) = 1 - 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

Sostituendo al numeratore e al denominatore le loro parti principali, si ottiene che il limite vale 1 / 3.

6. Provare che la funzione

$$f(x) = (x^2 - 1) \log \frac{x-1}{x+1}$$

ha un asintoto per $x \to +\infty$ e trovare la posizione reciproca.

Invece di risolvere il problema seguendo il procedimento consueto, vogliamo utilizzare la formula di Taylor. Per questo eseguiamo il cambiamento di variabile t = 1 / x, riconducendoci ad una variabile che tende a 0 (da destra); la funzione da studiare nell'intorno (destro) di 0 è

$$\frac{1-t^2}{t^2} \log \frac{1-t}{1+t}.$$

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\log \frac{1-t}{1+t} = -2t - 2t^3/3 + o(t^3).$$

$$(1-t^2) \log \frac{1-t}{1+t} = -2t + 4t^3/3 + o(t^3)$$

$$\frac{1-t^2}{t^2} \log \frac{1-t}{1+t} = -\frac{2}{t} + \frac{4t}{3} + o(t)$$

Ritornando alla variabile x:

$$f(x) = -2x + 4/(3x) + o(1/x)$$

Ovviamente questa approssimazione **non** è la formula di Taylor di punto iniziale ∞, che non ha alcun senso; comunemente si parla a questo proposito di approssimazione asintotica.

Il termine non infinitesimo -2 x assicura che la retta y = - 2 x è asintoto per la funzione.
Poiché per x > 0 il termine 4 / 3x è positivo, anche 4 / (3 x) + o (1 / x) lo è in un intorno di + ∞; dunque f (x) + 2 x è positivo in un intorno di + ∞ e quindi - almeno da un certo punto in poi - il grafico della funzione si avvicina alla retta da sopra.

Verifichiamo queste affermazioni.

La prima è ovvia: f (x) + 2x = 4 / (3 x) + o (1 / x) $\to$ 0 .

Per la seconda, riscritto f (x) + 2 x nella forma

$$\frac{1}{x}\left(\frac{4}{3}+\frac{o(1/x)}{1/x}\right),$$

(abbiamo messo in evidenza 1 / x nell'espressione precedente) si osserva che il termine in parentesi per x $\to$ + ∞ tende a 4 / 3; per il teorema della permanenza del segno questo termine è localmente positivo. Poiché è moltiplicato per una quantità che possiamo supporre positiva, il prodotto (e quindi f (x) + 2 x) è localmente positivo.

Osservazione

A proposito di approssimazioni che si ottengono utilizzando la formula di Taylor, ma che **non** sono approssimazioni di Taylor, consideriamo questo semplice esempio.

Dall'approssimazione senx = x – x^3/6 + o (x^4) valida in un intorno di x_0 = 0, per semplice sostituzione si ottiene $\operatorname{sen}\sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{x^3}/6 + o(x^{3/2})$ che dà un'approssimazione locale della funzione $\operatorname{sen}\sqrt{x}$ senza che quella ottenuta sia la sua formula di Taylor (la funzione **non** è neppure derivabile in 0) .

Altri esercizi : approssimazioni

1. $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\log(1+x)}{x}\right)$

   $x_0 = 0$, $n = 3$

2. Studiare il comportamento in un intorno di $+\infty$ della funzione

   $$\frac{x+1}{x-1}\sqrt{x^2-4}$$

   cioè provare che ha un asintoto e trovare la posizione del grafico della funzione rispetto all'asintoto.

   R.: $f(x) = x + 2 - 2/x^2 + o(1/x^2)$.

3. $\dfrac{1}{x-2}$ $\quad x_0 = 0$, $n = 4$

4. $\dfrac{1}{x^2 - x - 2}$ $\quad x_0 = 0$, $n = 4$

5. $\mathrm{tg}x$, $x_0 = \pi/4$, $n = 3$

Altri esercizi : calcolo di limiti con la formula di Taylor

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x^2}{x^2 (\cos^2 x - \cos x^2)}$ = 0

2. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x)} \right)^{1/x}$

3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x} - \cos\sqrt{x}}{\log(\log(e+x^2))}$

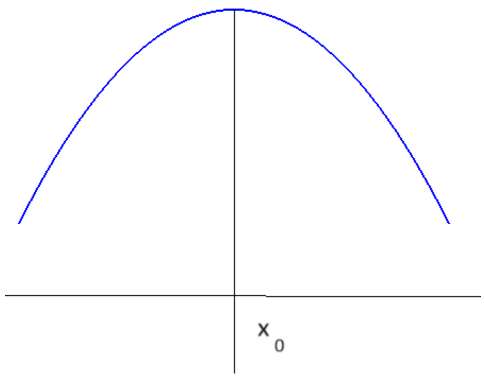
5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1-x^2) - 2 + 2\sqrt{1+x^2}}{e^{x^2} - 3 + 2\cos x}$

Applicazione al comportamento locale di una funzione

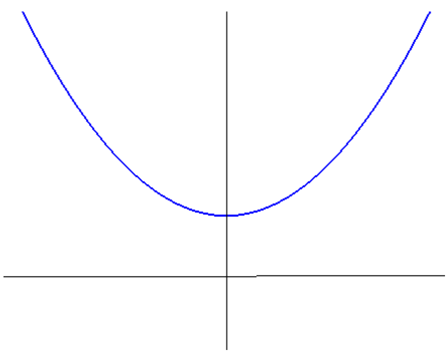
I caso: studio dei massimi e minimi locali

Supponiamo che x_0 sia **un punto interno** all'intervallo in cui è definita la funzione f (x) tale che f ' (x_0) = 0 (punto stazionario).
Vogliamo studiare il comportamento locale della funzione nell'intorno di x_0 .

Ci sono 5 possibilità :



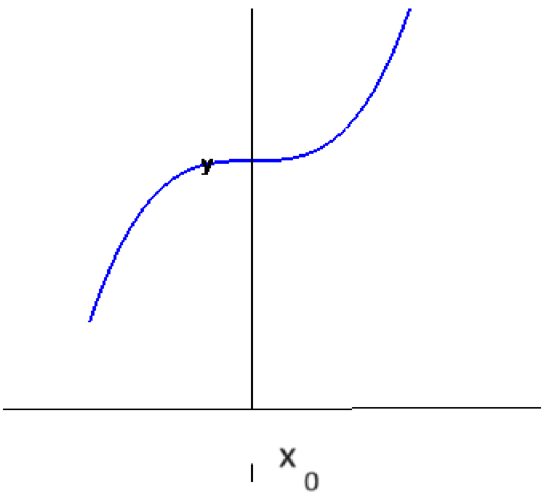
punto di massimo locale
$f(x) < f(x_0)$ loc. $(x \neq x_0)$
$f(x) - f(x_0) < 0$ loc. $(x \neq x_0)$



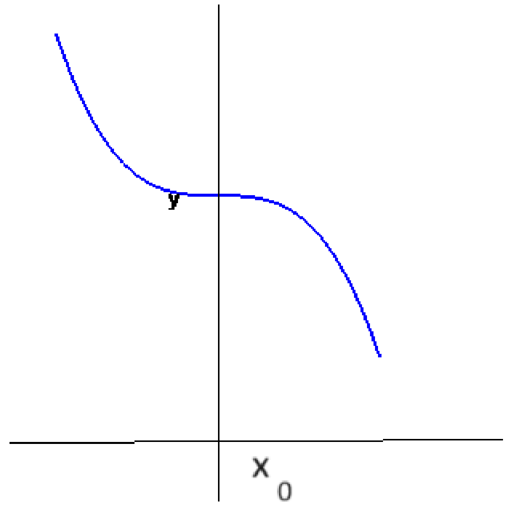
punto di minimo locale

$f(x) > f(x_0)$ loc. $(x \neq x_0)$

$f(x) - f(x_0) > 0$ loc. $(x \neq x_0)$



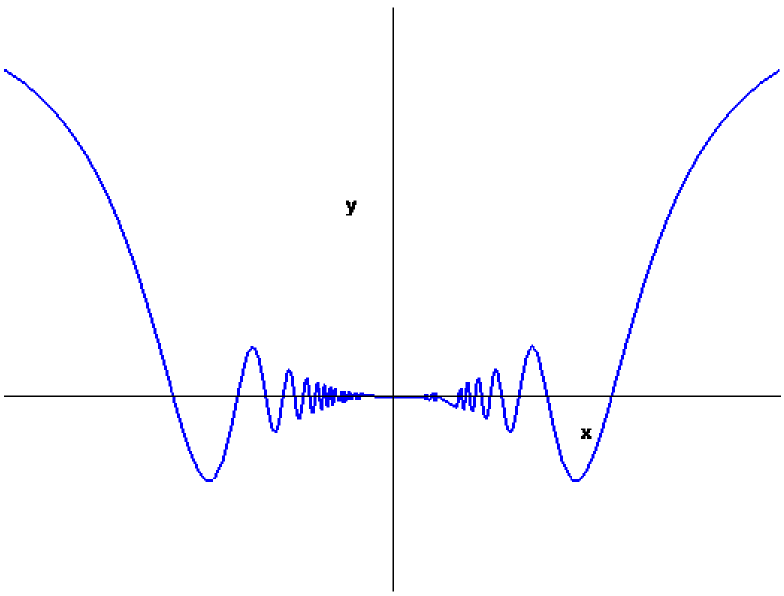
punto di flesso ascendente



punto di flesso discendente

f (x) – f (x_0) non ha localmente segno costante

Caso patologico



La curva in figura rappresenta il grafico della funzione f (x) = x^2 sen (1 / x^2) prolungata per continuità in 0 con valore nullo.
In ogni intorno di 0 il segno di f (x) – f (0) (cioè di f (x)) cambia infinite volte.

Supponiamo che sia

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

(in altre parole, sia n l'ordine della prima derivata diversa da 0 nel punto).

La formula di Taylor di punto iniziale x_0 diventa:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

ovvero

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right\} \quad .$$

Per $x \to x_0$ il termine in parentesi ha come limite $f^{(n)}(x_0) / n!$; dunque per il teorema della permanenza del segno localmente ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$. Inoltre, per n pari $(x - x_0)^n$ è positivo, per n dispari cambia di segno a seconda che x sia maggiore o minore di x_0.

Dunque:

- se n è pari, $f(x) - f(x_0)$ ha <u>localmente</u> segno costante e questo porta ad un punto di massimo (derivata negativa) o di minimo locale (derivata positiva);

- se n è dispari ed x_0 è <u>un punto interno</u>, $f(x) - f(x_0)$ cambia di segno quando x passa per x_0 e dunque il punto non è né di massimo né di minimo.

Riassumendo: se x_0 è un punto interno e se n è l'ordine della prima derivata diversa da 0 in questo punto:

<u>se n è pari</u>

$\mathbf{f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0}$ **è punto di minimo locale**

$\mathbf{f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0}$ **è punto di massimo locale**

<u>se n è dispari</u>

x_0 non è di massimo né di minimo

II caso: studio della convessità, della concavità, dei punti di flesso

Supponiamo x_0 punto interno in cui si ha :

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \ , \ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

(in altre parole, sia n l'ordine della prima derivata successiva ad f ' diversa da 0 nel punto).

In tali ipotesi, se n è pari

x_0 non è punto di flesso.

Se invece n è dispari

x_0 è punto di flesso.

dimostrazione

La formula di Taylor di punto iniziale x_0 diventa:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

ovvero

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right\} .$$

Per $x \to x_0$ il termine in parentesi ha come limite $f^{(n)}(x_0) / n!$; dunque per il teorema della permanenza del segno localmente ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$.

Per n pari $(x - x_0)^n$ è positivo e quindi localmente il segno del secondo membro è costante : non c'è flesso e localmente il grafico della funzione sta tutto dalla stessa parte rispetto alla tangente.
Se invece n è dispari , $(x - x_0)^n$ cambia di segno a seconda che x sia maggiore o minore di x_0. In questo caso localmente il grafico della funzione non sta tutto dalla stessa parte rispetto alla retta tangente; siamo in presenza di un flesso che sarà ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$, discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Riassumendo:

Supponiamo x_0 punto interno e sia n l'ordine della prima derivata successiva ad f ' diversa da 0 nel punto.

In tali ipotesi:

se n è pari	**x_0 non è punto di flesso**
se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$	**x_0 è punto di flesso ascendente**
se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0$	**x_0 è punto di flesso discendente**

Sintetizzando:

Il comportamento locale della funzione è lo stesso della parte principale di $f(x) - f(x_0)$, cioè del primo termine non nullo e non costante della sua formula di Taylor.
Ad esempio:

$f(x) = 1 + x + o(x)$	0 non è di min/max e non è di flesso
$f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$	0 è punto di min locale
$f(x) = 1 + x^3 + o(x^3)$	0 è un flesso ascendente

Esempi

1.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = (x-1)^3 (2x-1)$$

Poiché

$$f'(x) = (x-1)^2 (8x-5)$$
$$f''(x) = 6(x-1)(4x-3)$$
$$f'''(x) = 6(8x-7),$$

si hanno i seguenti risultati:

per x = 1

$f'(1) = f''(1) = 0$, $f'''(1) > 0$

x = 1 è un punto di flesso orizzontale

per x = 5 / 8

$f'(5/8) = 0$, $f''(5/8) > 0$

x = 5 / 8 è un punto di minimo locale

per x = 3 / 4

$f'(3/4) < 0$; $f''(3/4) = 0$, $f'''(3/4) < 0$

x = 3 / 4 è un punto di flesso

2.

$f(x) = x \log x$, $x > 0$

$f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = 1/x$

L'unico punto stazionario è x = 1 / e; poiché f " (1 / e) > 0, il punto è di minimo (assoluto).

Osservazione

Nelle stesse ipotesi precedenti, consideriamo adesso il caso che x_0 **non** sia interno .

Supponiamo x_0 = a (primo estremo dell'intervallo):

$$f(x) - f(a) = (x - a)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(1) \right\} \quad ;$$

poiché x – a ha sempre segno positivo sia per n pari che per n dispari, il segno di f (x) – f (a) dipende localmente da quello della derivata e quindi il punto è ancora di minimo (derivata positiva) o di massimo (derivata negativa).

Se x_0 = b (secondo estremo dell'intervallo) :

$$f(x) - f(b) = (x - b)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(b)}{n!} + o(1) \right\}$$

valgono le conclusioni precedenti se n é pari, quelle opposte se n è dispari (perché x – b è negativo).

Riassumendo:

se <u>n è pari</u>

$\mathbf{f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0}$ **è punto di minimo locale**

$\mathbf{f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0}$ **è punto di massimo locale.**

se n è dispari ed x_0 è interno

x_0 non è né di massimo né di minimo

se n è dispari ed $x_0 = a$ (primo estremo dell'intervallo)

$f^{(n)}(a) > 0 \quad \Rightarrow$ **a è punto di minimo locale**

$f^{(n)}(a) < 0 \quad \Rightarrow$ **a è punto di massimo locale.**

se n è dispari ed $x_0 = b$ (secondo estremo dell'intervallo)

$f^{(n)}(b) > 0 \quad \Rightarrow$ **b è punto di massimo locale**

$f^{(n)}(b) < 0 \quad \Rightarrow$ **b è punto di minimo locale.**