Presentazione del corso

Pagina di didattica http://people.dm.unipi.it/sassetti

Posta elettronica mauro.sassetti@unipi.it

Ricevimento studenti virtuale su piattaforma Teams da richiedere direttamente a lezione o inviando un mail

Principali sistemi numerici

- **I numeri naturali**

N = { 1 , 2 , 3 , ….., n , ….. }

Osservazione sulla descrizione dell'insieme

Osservazione sul fatto che facciamo partire i numeri naturali da 1

Sono un insieme discreto

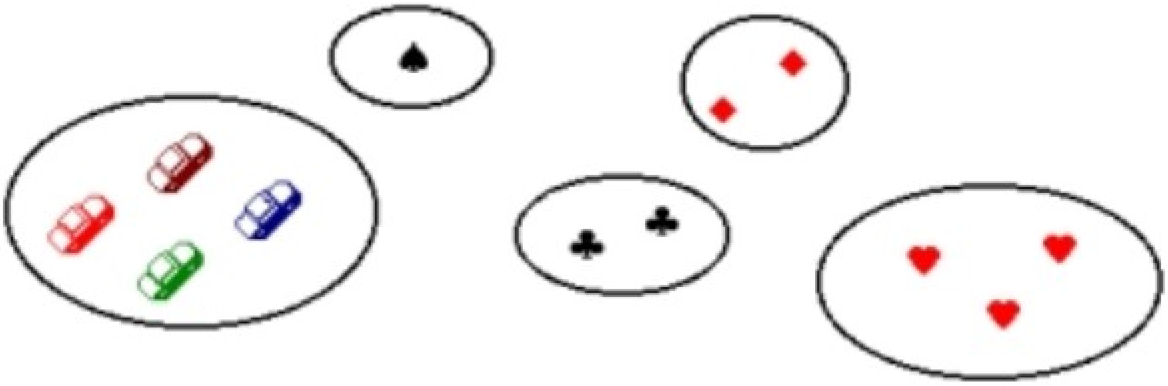
Proprietà essenziale: il principio di induzione (che tra l'altro permette di dare una corretta definizione dell'insieme dei naturali; ne parleremo in una prossima lezione).

I naturali sono i primi numeri inventati dall'uomo. Le origini dell'uso dei numeri da parte dell'umanità naturalmente non sono documentate; le prime tracce di qualcosa che si suppone sia un conteggio risalgono a più di 30.000 anni fa (tra Paleolitico e Neolitico), e sono costituite da ossa di animale intagliate con tacche che si pensa indichino un qualche tipo di conteggio. L'esempio più antico è l'osso di Lebombo, rinvenuto in Sud Africa: probabilmente era il manico di un bastone usato da un pastore per numerare il proprio gregge (una tacca = una pecora) o forse un calendario lunare. L'osso di Ishango (dal nome della località presso le sorgenti del Nilo in cui fu rinvenuto) risale a circa 20mila anni fa: si tratta dell'osso di un babbuino la cui superficie è ricoperta di incisioni raggruppate in tre colonne, in una disposizione asimettrica. Gli studiosi ritengono che il suo utilizzo fosse più complesso del precedente esempio : alcuni ipotizzano che contenesse regole di calcolo , quali la moltiplicazione e la divisione per 2 , altri che registrasse le fasi lunari , legate ad esempio a stabilire i tempi della semina.

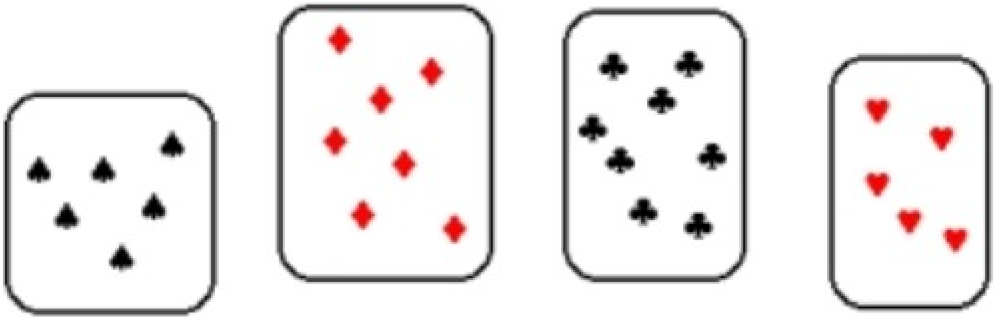
È difficile dire come sono nati i numeri. La loro origine affonda le radici nella preistoria: certamente non sono comparsi all'improvviso, non sono la scoperta o l'invenzione di qualcuno, ma il risultato di una lenta evoluzione cerebrale che ha portato ad un alto livello di astrazione con un salto di qualità che è avvenuto nella storia umana così come avviene nella vita dell'individuo.

Si potrebbe pensare che l'uso dei numeri sia qualcosa di innato. Che nella nostra struttura mentale esista un senso della quantità, come la capacità di percepire il caldo e il freddo, o i colori. Le cose non stanno affatto così: sicuramente c'è stato un lungo periodo in cui gli esseri umani non avevano né il concetto di numero, né la capacità di contare. La migliore prova di ciò è che esistono tuttora popolazioni che non hanno sviluppato il concetto di numero, e nei cui linguaggi le parole per la serie dei numeri non esistono: "uno", "due" e "molti" rappresentano ancora le uniche grandezze.
Quello che è presente nella nostra mente è la percezione diretta del numero, una capacità immediata di distinguere insiemi con una quantità diversa di elementi, che non è legata al contare.

Degli insiemi nella figura successiva sappiamo dire qual è quello con più elementi e quello con meno elementi, basta una semplice occhiata: e la percezione è immediata; non c'è bisogno di contare gli elementi degli insiemi.



La cosa è diversa con questi altri insiemi.

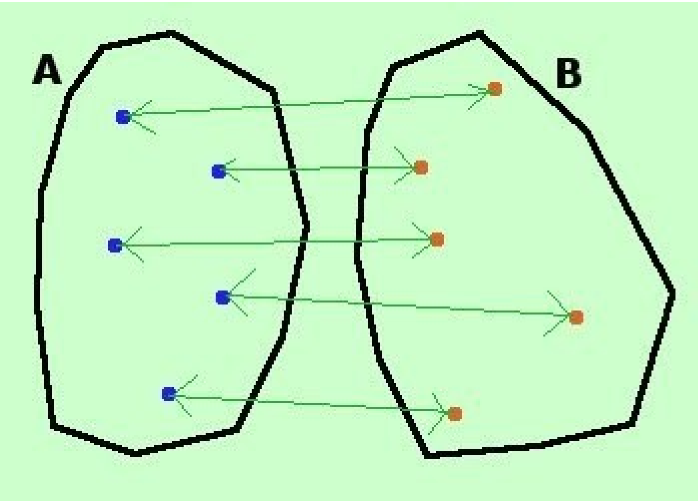


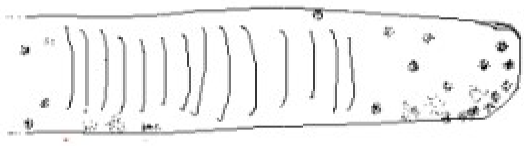
In questo caso abbiamo bisogno di contare in qualche modo gli elementi degli insiemi per poterli confrontare. .
Una percezione immediata della quantità esiste, ma vale solo per piccoli numeri . Questo tipo di percezione non è una prerogativa umana : molti animali la hanno e la usano ed è perciò indipendente dalla capacità di linguaggio e possiede una lunga storia evolutiva; il saper distinguere ad "occhio" le quantità di insiemi piccoli, non rende le nostre capacità aritmetiche superiori a quelle di un animale. Questa è quindi la situazione, diciamo, "di partenza" nell'evoluzione culturale umana: una capacità di percezione immediata di quantità (fino a piccoli numeri, tipicamente quattro) che comunque non ci distingue dagli altri animali, e una capacità "culturale" di padronanza del concetto di numero praticamente nulla, rappresentata dal concetto elementare:

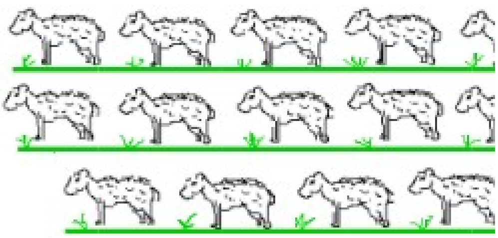
più di due = una moltitudine

I numeri naturali sono stati inventati per distinguere all’interno di questa generica moltitudine e con una motivazione pratica.

Ad un certo stadio dell’evoluzione umana, il pastore iniziò a rappresentare l'insieme dei suoi animali con oggetti concreti, ad esempio con sassolini racchiusi un sacchetto. Usando un linguaggio fortemente anacronistico, il pastore stabiliva una corrispondenza biunivoca tra le sue pecore e i sassolini.







In questo modo poteva ad esempio accertarsi se le pecore uscite di mattina dall’ovile erano tante quante quelle che la sera vi rientravano, o se qualcuna era andata persa, o ancora se qualcuna si era aggiunta. Sempre usando un linguaggio anacronistico, se tra l’insieme dei sassolini e quello delle pecore non si poteva stabilire una corrispondenza iniettiva (i sassolini erano più delle pecore) , qualche ovino era andato perso (tanti quanti i sassolini rimasti nel sacchetto dopo che il pastore aveva eliminato un sassolino per ogni pecora rientrata) ; viceversa se non si poteva stabilire una corrispondenza surgettiva (i sassolini erano meno delle pecore), qualche ovino si era aggiunto al gregge iniziale.

L’esempio dei sassolini è particolarmente significativo se pensiamo che la nostra parola “ calcolo”   deriva dal latino “calculus” che significa appunto sassolino, da cui anche l’uso in italiano per indicare le concrezioni calcaree che provocano coliche al nostro organismo.

Avremmo potuto riformulare l’esempio servendoci delle tacche incise sul manico di un bastone, come abbiamo già visto. Comunque, l’uso di piccole pietre è testimoniato nella civiltà sumera. Le testimonianze più antiche al riguardo si datano al IX millennio a.C. Si tratta di ciò che gli studiosi chiamano “gettoni” , piccoli pezzi di argilla di diverse forme e misure che rappresentavano cibi, tessuti oppure bestiame e quantità. I gettoni venivano conservati all’interno di contenitori di argilla che i ricercatori chiamano “bolle” e che, una volta sigillate con i gettoni all’interno (ma che venivano anche riportati sulla superficie esterna) , servivano da prova per certificare ogni tipo di transazione.

A questo stadio non c'è il concetto di numero, non ci sono nemmeno le parole per indicare i singoli numeri, né tanto meno dei simboli; c'è solo la pratica del mettere in corrispondenza due insiemi di oggetti.

Il concetto di numero è un’astrazione che nasce quando si vuole esprimere ciò che hanno in comune due insiemi che sono tra di loro in corrispondenza biunivoca. A questo punto ci si rese conto che la procedura della “bolla di accompagnamento” poteva essere semplificata incidendo su una tavoletta di argilla dei segni che sostituivano i gettoni; per evitare possibili truffe, la tavoletta veniva certificata da un funzionario addetto al controllo.

Il passo successivo è quello di avere delle parole per i singoli numeri, e ciò avvenne in due stadi.

Prima le parole che indicano i numeri furono solo degli aggettivi: quando consideriamo "uno", "due" o "sei" come aggettivi numerali, essi sono solo attributi di insiemi, come nelle espressioni "due cani" o "sei barche". Qui "due" e "sei" hanno lo stesso valore di aggettivo, come "rosso" o "saporito".

Poi, con l'uso del numero come un vero e proprio nome (cioè un sostantivo) si ha il completo passaggio al concetto astratto di numero, infatti col passaggio al sostantivo si ha la possibilità di enunciare anche proprietà dei numeri stessi (e non solo degli oggetti contati), come quando, ad esempio, diciamo "il tre è dispari".

L’altro problema è quello di rappresentare i numeri.

La rappresentazione dei numeri e il loro uso ai fini di calcolo sono documentati per la prima volta nella civiltà sumerica attorno al 4000 a.C.

Se pensiamo al modo che aveva il pastore per controllare il proprio gregge incidendo su un bastone una tacca per ogni pecora e se pensiamo alla numerazione latina (I II III …) , è abbastanza facile capire il meccanismo che ha portato alla rappresentazione dei numeri. L’uso di lettere per indicare certi numeri (ad esempio, per i Romani V = 5 , X = 10 , …) permetteva un’ovvia semplificazione. Per inciso, la lettera V è stata interpretata come una mano aperta stilizzata (5 dita), la X come due mani sovrapposte (10 dita).

Quello presentato è solo uno dei tanti esempi, dato che ogni popolo dell’antichità aveva il suo modo proprio di raffigurare i numeri, così come aveva un suo alfabeto.

I numeri interi

Z = { …. , -n , ….. , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , ….., n , ….. }

Z sta per la parola tedesca Zahl che significa “numero”

Sono la prima estensione del campo numerico, ma in senso algebrico, non in quello storico.

La presenza dei numeri relativi nella storia dell'uomo si può far risalire alle civiltà antiche in cui si svilupparono i commerci e le attività agricole. L'aumentare degli scambi di merci fece comparire il concetto di debito o spesa, che si contrapponeva a quello di guadagno o ricavo. Occorreva in qualche modo segnalare e distinguere nei conteggi i numeri associati a cose che si dovevano dare o erano andate perse da quelli concernenti cose che si avevano o venivano acquisite. Le prime testimonianze scritte di questa distinzione tra numeri si possono ritrovare già in testi cuneiformi babilonesi risalenti al 2000 a. C. Concretamente , i numeri “negativi” erano scritti in un colore diverso oppure preceduti da un segno che è l’antenato del nostro meno. Il colore o il segno non creavano però nuovi numeri: si limitavano a stabilire una qualifica ai numeri naturali già noti. Anche lo zero fa la sua prima comparsa in ambito mesopotamico, a partire dal IV secolo a.C. , non come nuovo numero, bensì come un simbolo che indicava l’assenza di un numero. Anche i matematici greci ritenevano insensato introdurre un numero per indicare qualcosa che non esiste. Come i Babilonesi, anch’essi lo usarono per indicare uno spazio vuoto , l’assenza di un umero in una qualche posizione. Il loro simbolo era molto simile a quello con cui noi indichiamo l’insieme vuoto. L’invenzione o la scoperta dei numeri negativi come nuovi numeri e dello zero come numero e non come simbolo avviene in India nel VII secolo d.C., in particolare con Brahmagupta, autore di un libro in cui propone il primo esempio di aritmetica sistematica comprendente i numeri negativi e lo zero, con le relative regole di calcolo che sono quelle che ancora oggi usiamo..

L'idea che i numeri negativi , indicanti qualcosa che ci viene tolto o che non si possiede, potessero essere accettati come soluzioni di problemi o manipolati con regole ben precise compatibili con quelle dei numeri naturali dovette comunque affermarsi a fatica nel corso dei secoli. Il primo matematico moderno a concepire numeri relativi come soluzioni di equazioni fu l'italiano Rafael Bombelli (XVI secolo). Eppure ancora Cartesio, vissuto nel secolo successivo, pur usando in modo rilevante i numeri relativi, non riteneva corrette e significative soluzioni negative di equazioni.

La principale invenzione dei matematici indiani fu però il sistema posizionale su base 10 . Già nell’antichità babilonese e poi nella matematica greca era in uso un sistema posizionale, ma su base 60 , usato nelle osservazioni astronomiche. Il passaggio a base 10 , con ogni evenienza suggerito dal numero delle dita delle mani , semplificava notevolmente il calcolo. Gli Arabi appresero dagli Indiani tutte queste innovazioni e le trasmisero agli Europei durante il Medioevo (perciò in Occidente i numeri scritti con questo sistema sono stati detti numeri arabi, anche se attualmente è in uso unpiù appropriato numeri indo-arabi). Essi chiamavano lo zero ṣifr , termine che significa "vuoto" (da cui è derivata la nostra parola “cifra”).

Fu in particolare Leonardo Fibonacci a far conoscere la numerazione posizionale in Europa con il suo Liber abaci, pubblicato nel 1202. Gli Arabi chiamavano lo zero ṣifr , termine che significa "vuoto" (da cui è derivata la nostra parola “cifra”); Fibonacci tradusse con il termine zephirum, per assonanza; da questo per successive deformazioni si arrivò all'italiano zero.

- **I numeri razionali**

Q = { m/n , con m $\in$ **Z** , n $\in$ **N** , m ed n primi tra loro }

Q come quoziente

Razionali da ratio = rapporto.

Osservazione sulla notazione dell'insieme.

Frazioni e numeri razionali.

Dal punto di vista algebrico sono una estensione degli interi; dal punto di vista storico i razionali (solo quelli positivi) costituiscono il primo insieme numerico inventato o scoperto dall'uomo <u>dopo</u> i naturali.

I numeri razionali positivi furono introdotti già nella matematica pre-ellenica, una volta riconosciuta l'impossibilità di trovare un'unità di misura universale, rispetto alla quale tutte le grandezze omogenee potevano essere espresse con numeri naturali, e sentita dunque l'esigenza di introdurre i sottomultipli e quindi le frazioni.

Documenti storici attestano l'uso delle frazioni presso gli antichi Egizi nel XVII secolo a.C. Nella visione dell'universo da parte della scuola pitagorica (VI secolo a.C.) i numeri razionali (positivi) erano essenziali: si riteneva infatti che ogni misura potesse essere espressa utilizzando questi numeri, cioè come rapporto tra numeri naturali; in altre parole, che due qualunque grandezze omogenee (ad esempio, due lunghezze) stessero sempre tra di loro in un rapporto razionale (ad esempio, la prima lunghezza è 2 / 3 della seconda). La scrittura comunemente usata ai nostri giorni (con linea orizzontale) e la lettura diversa del numeratore con un numero cardinale e del denominatore con un numero ordinale

si scrive $\frac{4}{9}$, si legge 4 noni

è dovuta a Leonardo Fibonacci.

Proprietà dei numeri razionali

Le proprietà dei numeri razionali comunemente usate nel calcolo si sintetizzano parlando di **Q** come di un **corpo commutativo (o campo) ordinato**. E' possibile scrivere una lista di proprietà a partire dalle quali si possono ricavare **tutte** le altre; questa lista è la più piccola, nel senso che se da essa togliamo una proprietà , questa non può essere dedotta dalle rimanenti. Possiamo dunque dire che questa lista è formata da proprietà necessarie e sufficienti alla caratterizzazione algebrica dei numeri razionali.

Queste proprietà si dividono in tre gruppi:

- **proprietà aritmetiche**, riguardanti le operazioni che si possono eseguire con i numeri razionali.

Nell'insieme **Q** sono definite due operazioni dette **somma** e **prodotto,** che ad ogni coppia x, y di numeri razionali fanno corrispondere in modo univoco due numeri razionali, indicati rispettivamente x + y e x y. Queste operazioni verificano le seguenti proprietà:

proprietà associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x (y z) = x (y z)$

proprietà commutativa: $x + y = y + x$, $x y = y x$

proprietà distributiva: $x (y + z) = x y + x z$

esistenza degli elementi neutri: esistono due numeri razionali distinti, precisamente 0 e 1, tali che per ogni numero razionale x risulta $x + 0 = 0 + x = 0$, $x 1 = 1 x = x$.

esistenza degli opposti: per ogni numero razionale x esiste un numero razionale y tale che $x + y = 0$

esistenza dei reciproci: per ogni $x \neq 0$ esiste un numero y tale che $x\ y = 1$.

La sottrazione e la divisione tra numeri razionali si possono dedurre dalle due operazioni primarie utilizzando gli elementi neutri:

$x - y = x + (-y)$ dove $-y$ è l'opposto di y

$x/y = x \cdot (1/y)$ dove $1/y$ è l'inverso di y

- **proprietà di ordinamento,** legate alla possibilità di stabilire quale tra due numeri razionali distinti è più grande e quale più piccolo

Nell'insieme **Q** è definita una relazione di ordinamento, detta di minore o uguale e indicata con $\leq$, con le seguenti proprietà:

proprietà riflessiva: $\forall\, x \in Q\ ,\ x \leq x$

proprietà antisimmetrica: $\forall\, x, y \in Q\ ,\ x \leq y\ \text{e}\ y \leq x \Rightarrow x = y$

proprietà transitiva: $\forall\, x, y, z \in Q\ ,\ x \leq y\ \text{e}\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

proprietà di dicotomia: $\forall\, x, y \in Q\ ,\ x \leq y$ oppure $y \leq x$ (in altre parole, due numeri razionali si sanno sempre confrontare tra di loro rispetto a questa relazione). Osservare che questa proprietà racchiude quella riflessiva, che quindi diventa superflua. In realtà, una relazione tra elementi di un insieme qualsiasi definisce un ordinamento purché verifichi le prime tre proprietà , la quarta non essendo necessaria: in questo caso si parla di ordinamento parziale; con l'aggiunta della quarta proprietà si ottiene un ordinamento totale.

Gli assiomi relativi all'ordinamento si riferiscono alla relazione di minore o uguale $\leq$ tra le coppie dei numeri razionali. La relazione di maggiore o uguale $\geq$ è ricondotta alla precedente mediante la definizione $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$. Pertanto anche questa seconda relazione verifica le proprietà analoghe a quelle indicate. Infine le relazioni di minore $<$ e di maggiore $>$ (dette anche relazioni di ordinamento in senso stretto) sono definite da $x < y \Leftrightarrow x \leq y,\ x \neq y$ e da $x > y \Leftrightarrow x \geq y,\ x \neq y$. Ricordiamo infine che i numeri reali $x > 0$ sono detti positivi, i numeri $x < 0$ negativi.

- **proprietà che legano le operazioni all'ordinamento**

legame tra ordinamento e somma: $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall z \in Q$

legame tra ordinamento e prodotto: $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z, \forall z \geq 0$.

Sul libro di riferimento sono riportate le altre principali proprietà del calcolo con i numeri razionali e viene fatto vedere come si possono dedurre da quelle precedentemente elencate.

Il numero

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \qquad \text{con } a_0 \in Z \text{ e con } a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

è generalmente scritto nella forma $r = a_0, a_1 \dots a_n$.

Diremo che r è un numero decimale e che la scrittura precedente costituisce la sua rappresentazione decimale finita.

Ad esempio

1 / 2 = 5 / 10 = 0,5

1 / 50 = 2 / 100 = 0,02

29 / 4 = 7 + 1 / 4 = 7 + 25 / 100 = 7 + 2 / 10 + 5 / 100 = 7,25

I numeri decimali sono necessariamente razionali, dato che si possono scrivere nella forma $r = a / 10^n$ $(\text{con } a \in Z)$ per un opportuno n naturale.

Non tutti i numeri razionali, però, hanno una rappresentazione decimale finita.

Ad esempio, se si potesse esprimere1 / 3 in questa forma, dovrebbero esistere due numeri naturali n ed a tali che:

$$1/3 = a/10^n \quad \text{cioè} \quad 10^n = 3a\,;$$

questo è impossibile perché risulterebbe che 10^n è divisibile per 3 e quindi anche 10 dovrebbe esserlo. Dunque il razionale 1 / 3 non ha rappresentazione decimale finita.

Ragionando alla stesso modo, i numeri razionali m / n con m ed n primi tra loro (frazione " ridotta ai minimi termini ") hanno una rappresentazione decimale finita solo se il denominatore n non ha divisori primi diversi da 2 e da 5.

Negli altri casi i numeri razionali hanno una rappresentazione decimale infinita periodica.

Infatti, dato il numero razionale x = m / n, i numeri a_0, a_1, a_2, ... sono i successivi quozienti nella divisione di m per n.

Se uno dei resti è 0, cioè se la divisione termina dopo un numero finito di passi, x è una frazione decimale ed ha una rappresentazione decimale finita. In caso contrario, il processo di divisione non ha termine e troviamo una rappresentazione decimale infinita. I resti che si ottengono nelle divisioni successive possono però assumere solo un numero finito di valori e precisamente 1, 2, …., n - 1 (oppure 0, ma abbiamo già esaminato questa possibilità); quindi dopo un numero finito di passi uno di questi resti si ripresenta, creando così una periodicità nei quozienti.

Viceversa, ad ogni rappresentazione decimale finita o periodica corrisponde necessariamente un numero razionale.

Ad esempio : dato il numero decimale periodico x = $1{,}0\overline{24}$, cerchiamo il numero razionale che ha questa rappresentazione decimale.

$$10x = 10{,}\overline{24} \qquad 1000x = 1024{,}\overline{24} \qquad (1000 - 10)\,x = (1024 - 10)$$

x = 1014 / 990 = 169 / 165.

Il procedimento eseguito si adatta al caso generale; il modo corretto di procedere fa uso del concetto di serie geometrica, che però non rientra nell'attuale programma del corso.

Le considerazioni equivalenti portano a stabilire una corrispondenza biunivoca tra razionali e decimali finiti o periodici. In realtà c'è ancora un'osservazione da fare.

Consideriamo il numero decimale $x = 0,\overline{9}$. Procedendo come prima:

$10\,x = 9,\overline{9} \rightarrow \quad 9\,x = 9 \rightarrow x = 1.$

Al numero razionale 1 corrispondono due diverse rappresentazioni decimali; se vogliamo che valga la corrispondenza biunivoca, dobbiamo limitarci a considerare le rappresentazioni decimali proprie, che sono quelle in cui la cifra 9 non si ripete periodicamente.

Densità dei numeri razionali.

Prendiamo in considerazione la rappresentazione dei numeri razionali sulla retta cartesiana: ad ogni numero razionale x rimane associato in modo unico un punto P della retta, di ascissa x. I punti così ottenuti sulla retta cartesiana si distribuiscono in modo denso, cioè tra due punti distinti ad ascissa razionale, per quanto vicini possano essere, ne esiste almeno un altro dello stesso tipo (anzi, ripetendo successivamente la considerazione, ne esistono infiniti): infatti se x, y sono due numeri razionali distinti con $x < y$, la loro media $(x + y) / 2$ è ancora razionale e risulta $x < (x + y) / 2 < y$.

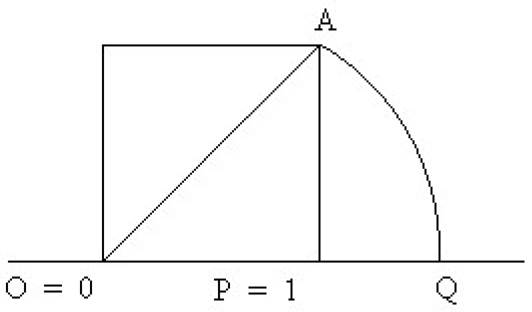
Il fatto che si possano sempre trovare dei numeri intermedi (cioè, la densità dei numeri razionali) non è sufficiente ad esaurire tutti i punti della retta cartesiana.

Fin dall'antichità classica (Pitagora) è noto che la diagonale di un quadrato e il suo lato esprimono grandezze tra loro non commensurabili, il che significa semplicemente che, assumendo il lato del quadrato come unità di misura, non esiste alcun numero razionale che possa esprimere la lunghezza della diagonale; in termini algebrici, non esiste alcun numero razionale x tale che risulti $x^2 = 2$.

Vale la pena di richiamare la dimostrazione di questo risultato.

Si ragiona per assurdo, supponendo esista un numero razionale (positivo) m / n (con m, n naturali primi tra loro) tale che $(m / n)^2 = 2$, cioè $m^2 = 2\,n^2$. Da questa uguaglianza segue che m^2 deve essere un numero pari e dunque tale deve essere anche m: scriviamolo nella forma 2 k e sostituiamo nell'uguaglianza. Semplificando, si trova $2 k^2 = n^2$. Dunque anche n deve essere pari e questo contraddice il fatto che m ed n siano primi tra loro. ☑

La costruzione descritta dalla figura successiva



individua sulla retta cartesiana un punto Q ad ascissa non razionale. A partire da questo punto possiamo costruire infiniti altri punti ad ascissa non razionale che si distribuiscono in modo denso sulla retta (basta considerare i segmenti OQ' o Q'O la cui lunghezza sia un numero razionale di volte quella del segmento OQ).

In altre parole, la distribuzione dei razionali sulla retta cartesiana non solo non esaurisce la retta stessa ma è del tutto " discontinua ", nel senso che presi due punti qualunque sulla retta, per quanto vicini tra loro, ne esistono infiniti ad ascissa non razionale intermedi (oltre ad infiniti ad ascissa razionale).

Il passaggio dall'insieme Q dei numeri razionali all'insieme R dei numeri reali è quello che permette di conservare le proprietà algebriche già viste ma anche di ottenere una distribuzione " continua " sulla retta, esaurendone tutti i punti. Per ottenere questo risultato occorre aggiungere alle proprietà algebriche un'altra proprietà di natura diversa: l'assioma di continuità o completezza, che per il momento presentiamo in forma puramente geometrica ; più avanti ne daremo una più adeguata versione analitica.

assioma di continuità o completezza: è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e i punti della retta .

Alla Scuola pitagorica si deve la creazione della matematica come scienza. Una tradizione storiografica vuole che Pitagora abbia appreso le sue conoscenze matematiche durante i suoi viaggi in Mesopotamia e in Egitto. Ma la matematica elaborata da queste civiltà era essenzialmente finalizzata a risolvere problemi pratici, senza nessuna impalcatura concettuale e senza nessun fondamento filosofico. Pitagora e la sua Scuola elaborano, invece, le strutture concettuali della matematica, facendo astrazione di tutte le applicazioni pratiche e stabilendo il carattere rigoroso della dimostrazione matematica.

Anche se è difficile stabilire con precisione quali siano le dottrine matematiche e i teoremi attribuibili al pitagorismo, è certo che si deve a Pitagora (e ai Pitagorici) la fondazione scientifica e filosofica della matematica. La tesi fondamentale della filosofia pitagorica è che il numero è il principio di tutte le cose: i numeri rappresentano l'essenza dell'universo. I numeri (i naturali) vengono concepiti come insiemi di unità. Questa, a sua volta, è considerata coincidente con il punto geometrico. Aritmetica e geometria sono così unite: un numero è una figura geometrica e ogni forma geometrica è riconducibile ad un numero, la figura geometrica è un ordinamento di punti nello spazio e il numero rappresenta la misura di questo ordinamento. Quella di Pitagora è una matematica del discontinuo, in cui l'accrescimento avviene per salti discontinui, ritenendo impossibile aggiungere qualcosa che sia minore dell'unità. Ogni segmento è costituito da un numero finito di punti, piccoli ma non nulli, tutti uguali tra loro. Questa identificazione tra geometria e aritmetica, tra figure e numeri comporta che il rapporto tra due grandezze tra loro omogenee sia un rapporto tra numeri naturali, cioè sia un numero razionale.

La scoperta dell'esistenza di due grandezze tra loro incommensurabili (la diagonale e il lato di un quadrato, appunto) dovuta ad Ippaso di Metaponto attorno al 500 a.C. segnò la fine della concezione pitagorica del numero e con essa crollò l'intera impalcatura filosofica della scuola pitagorica. Guardandola con i nostri occhi, questa scoperta fu l'eredità più grande trasmessa dai pitagorici al pensiero filosofico e scientifico successivo. Essa, infatti, aprì ufficialmente le porte al concetto di infinito e al metodo dimostrativo. In altre parole, l'incommensurabilità , se per i pitagorici significò il crollo delle loro credenze, per altri costituì un'occasione per investigare la natura avendo a disposizione nuovi oggetti. Furono chiamati irrazionali in quanto non razionali, cioè non esprimibili in termini di rapporti, visto che tra la diagonale e il lato del quadrato non esiste rapporto. L'idea di numero irrazionale è difficile, anche se siamo abituati a considerare √2 un numero come tutti gli altri. Gli scienziati greci si rifiutavano di considerare il rapporto fra la diagonale e il lato del quadrato un numero come tutti gli altri: facevano ragionamenti e operazioni su tale rapporto, ma sempre sotto forma geometrica, senza farne oggetto di calcolo aritmetico. Per arrivare all'algebra, all'astrazione che permette di considerare numeri anche gli irrazionali, dovrà passare molto tempo.

I secoli che vanno dalla crisi pitagorica alla sistemazione euclidea (cioè dal VI al III secolo a.C.) sono dedicati ad una ristrutturazione della geometria su basi non numeriche, relegando in posizione marginale la teoria dei numeri. Dalla dottrina pitagorica che vede il numero come elemento unificante della realtà, si passa ad una nuova visione in cui l'interpretazione del continuo e quindi la misura spettano alla geometria, mentre ai numeri è relegato l'aspetto discreto e quindi l'originaria semplice enumerazione.

La centralità del numero torna a proporsi solo agli inizi del XIII secolo con le esigenze di calcolo nate con lo sviluppo dei traffici commerciali: il rinnovamento è dovuto a Leonardo Fibonacci , con la mediazione dell'algebra araba. Le necessità pratiche obbligano ad accettare i numeri irrazionali (in primis, quelli dovuti all'estrazione delle radici quadrate che nascono dalla risoluzione delle equazioni di secondo grado); a differenza di quanto fecero i pitagorici, ora non ci si pone domande sulla loro natura, ma ci si accontenta di un loro calcolo approssimato. Questo atteggiamento pragmatico durerà anche nei secoli successivi.

La necessità di dare una base solida alla teoria dei numeri fu avvertita solo in epoca relativamente recente, specialmente dopo i lavori di Cauchy sul calcolo infinitesimale (tra il 1821 e il 1823): lo sforzo di immaginazione necessario fu di natura totalmente diversa dai precedenti, l'aritmetica non potendo più fornire nuovi argomenti.

Per arrivare ad una formulazione dell'assioma di continuità che non usi la geometria bisognerà aspettare il 1872 con Dedekind, seguito – ma sempre nello stesso anno – da Cantor.

Riprenderemo questo assioma in una prossima lezione.