Complementi di Matematica
Ing.Energetica-Elettrica-Sicurezza
Versione A.A. 2007-08

Claudio Saccon

3 ottobre 2007

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Funzioni, successioni, limiti

In tutto quanto segue $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, cioè gli interi da zero in avanti, e $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi.

Ricordiamo che la scrittura $f : A \to B$ indica che f è una *funzione* definita sull'insieme A a valori nell'insieme B (f *va da/ manda* A in B). Per ogni a in A è definito univocamente un b in B: si scrive allora $f(a) = b$; si dice che a è la *variabile* che si mette ad *argomento* di f e che $b = f(a)$ è il *valore* che f assume in a.
Per esempio si può introdurre la funzione $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dicendo che $q(x) = x^2$. Notiamo che sarebbe stato lo stesso scrivere $q(a) = a^2$, l'importante è chiarire quale sia la regola che fa passare dall'argomento al valore, in questo caso l'elevazione al quadrato. Quindi nella definizione $q(x) = x^2$ la lettera x è una "variabile muta".
Da questa impostazione segue che la funzione si chiama f (q nell'esempio) mentre la scrittura $f(x)$ indica il valore che f assume in x (che deve essere noto quando lo si scrive). Nella pratica tale regola è spesso infranta e si scrive $f(x)$ per indicare la funzione (è più veloce dire "la funzione x^2" rispetto a "la funzione $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $q(x) = x^2$ per ogni x"), bisogna però essere consapevoli che si tratta di un piccolo abuso e tenere presente che parlando di una funzione si pensa al "complesso di tutti i suoi valori" (più precisamente alla regola che dato x "produce" $f(x)$. Questo sarà particolarmente vero nel seguito del corso in cui le funzioni saranno viste come oggetti singoli, su cui per esempio calcolare altre funzioni. Un modo utile di pensare a una funzione è attraverso il suo *grafico*, cioè all'insieme $\{(a, b) : a \in A, b \in B, b = f(a)\}$.

Si chiama *successione* una funzione che prende i suoi argomenti tra i nu-

meri interi. Quindi una successione in B (o anche una successione di punti di B) è una f con $f : \mathbb{N} \to B$ - o più in generale $f : \{n_0, n_0 + 1, \dots\} \to B$. Tradizionalmente nel caso delle successioni si scrive f_n al posto di $f(n)$ e invece di f si scrive (f_n) (o $(f_n)_{n \geq n_0}$ quando serve indicare anche il punto iniziale in cui è definita la successione). Per esempio $(n^2)_{n \geq 0}$ è una successione, che differisce dalla funzione q di prima in quanto è definita solo per argomenti interi. Un altro esempio è $\left(\dfrac{1}{n-2}\right)_{n \geq 3}$ che è definita da 3 in poi.
Di solito le successioni si indicano con le prime lettere dell'alfabeto ((a_n), (b_n), (c_n),$\dots$) e spesso si assume implicitamente che n (o m) indichino delle variabili intere.

In tutta l'Analisi Matematica è fondamentale la nozione di **limite**. Rinviamo ai testi del primo anno la definizione di limite per funzioni reali di una variabile reale (che comprende anche quella per le successioni di numeri reali) e tutte le relative proprietà. che diamo quindi per note (ricorderemo invece, fra un momento, la definizione di limite in più variabili).
Ricordiamo solo che se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, x_0 è un punto di accumulazione per A (potendo anche essere $x_0 = \pm\infty$) e $f : A \to \mathbb{R}$, il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 (quando esiste) si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Analogamente (ma non ci sarebbe necessità di dirlo) nel caso di una successione $(a_n)_{n \geq n_0}$ si scrive $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ ($+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$). Per indicare che una funzione ammette un certo limite l per x tendente a x_0 (cioè che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$) scriveremo spesso

$$f(x) \overset{x \to x_o}{\longrightarrow} l \qquad (f(x) \to l, \text{ se } x_0 \text{ è chiaro dal contesto})$$

(dove l può essere finito o infinito). Nello stesso modo, nel caso delle successioni scriveremo

$$a_n \to l$$

(in questo caso n non può tendere che a $+\infty$). Quindi le scritture:

$$\frac{1}{x^2} \overset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \frac{n}{n+1} \to 1, \qquad n \to +\infty,$$

sono sinonimi di

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \qquad \lim_{n \to +\infty} n = +\infty.$$

Vediamo come si estende la nozione di limite al caso di più variabili.

1.1.1 Definizione. Dato N intero si indica con $\mathbb{R}^N$ l'insieme delle N-uple ordinate $(x_1, \ldots, x_N)$. Si chiama *modulo* del punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, il numero $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots, x_N^2}$. Dati $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ chiameremo *distanza* tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ l'espressione

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots, (x_N - y_N)^2}.$$

Useremo (in questo paragrafo) la convenzione di scrivere i punti di $\mathbb{R}^N$ in grassetto e in carattere normale le coordinate.

1.1.2 Proposizione. *Vale la* disuguaglianza triangolare*:*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N.$$

1.1.3 Definizione. Se $(\mathbf{a}_n)$ è una successione di punti di $\mathbb{R}^N$ e se $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ diremo che $\mathbf{l}$ è il limite per n che tende all'infinito di $(\mathbf{a}_n)$, e scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l},$$

se

$$\lim_{n \to +\infty} |\mathbf{a}_n - \mathbf{l}| = 0.$$

Diremo anche, in questo caso, che tende a $\mathbf{l}$ e scriveremo spesso $\mathbf{a}_n \to \mathbf{l}$.

Per esempio $\mathbf{a}_n := \left(\dfrac{n}{n^2 + 1}, \dfrac{n}{n + 1} \right) \to (0, 1)$ (per $n \to +\infty$). Infatti

$$|\mathbf{a}_n - (0, 1)| = \sqrt{\frac{n^2}{(n^2 + 1)^2} + \frac{(-1)^2}{(n + 1)^2}} \to 0.$$

1.1.4 Definizione. Dato un insieme A contenuto in $\mathbb{R}^N$ e un punto $\mathbf{x}_0$ di $\mathbb{R}^N$ diremo che $\mathbf{x}_0$ è di *accumulazione* per A se esiste una successione $(\mathbf{x}_n)$ di punti di A che tende a $\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x}_n \in A$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$).

Per esempio il punto $(1, 0)$ è di accumulazione per il cerchio aperto di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1: $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$.

1.1.5 Definizione. Siano N ed M due interi maggiori o eguali a 1. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x}_0$ un punto di accumulazione per A e sia $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ ($\mathbf{f}$ è una funzione di N variabili reali a valori in $\mathbb{R}^M$). Dato $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$ diremo che $\mathbf{l}$ è il limite di $\mathbf{f}$ per $\mathbf{x}$ che tende a $\mathbf{x}_0$, e scriveremo

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l},$$

se per qualunque successione $(\mathbf{x}_n)$ di punti di A, tale che $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ succcede che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Diremo, anche in questo caso, che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tende a $\mathbf{l}$ e scriveremo spesso $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \overset{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\longrightarrow} \mathbf{l}$ ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}$ se $\mathbf{x}_0$ è chiaro dal contesto).

Per esempio $\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right) \to (0,1)$ se $(x,y) \to (1,1)$ (si può verificarlo con un po' di pazienza).

Se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ possiamo chiaramente scrivere $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_M(\mathbf{x}))$. In questo modo risultano definite $f_j : A \to \mathbb{R}$ per $j = 1, \ldots, M$, che si chiamano le *componenti* di $\mathbf{f}$.

1.1.6 Proposizione. *Se* $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$ *con* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_M)$, *allora*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{l} \Longleftrightarrow f_j(\mathbf{x}) \to l_j \qquad j = 1, \ldots, M.$$

1.1.7 Definizione (continuità)**.** Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e sia $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$. Dato un punto $\mathbf{x}_0$ in A si dice che $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \overset{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\longrightarrow} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

nel caso in cui $\mathbf{x}_0$ sia punto di accumulazione per A. Nell'altro caso ($\mathbf{x}_0$ non è di accumulazione per A) la $\mathbf{f}$ si dice continua senza altre condizioni.

Si dice che $\mathbf{f}$ è continua su A se $\mathbf{f}$ è continua in ogni $\mathbf{x}_0$ di A.

Si può notare che con la definizione sopra una successione è automaticamente continua in tutti i suoi punti (nessun intero è di accumulazione per $\mathbb{N}$). Nella pratica però i casi interessanti sono quelli in cui i punti di A sono di accumulazione per A e quindi la continuità si esprime mediante il limite.

Non ripetiamo qui le proprietà dei limiti e della continuità in più variabili (accenneremo a qualcosa nel prossimo paragrafo) per le quali rinviamo a un testo opportuno.

Ricordiamo però il Teorema di Weierstrass per funzioni più variabili, con cui faremo dei confronti nel seguito. Premettiamo due definizioni.

1.1.8 Definizione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$.

- A si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.
- A si dice *limitato* se esiste una costante M per cui $|\mathbf{x}| \le M$ per tutti i punti $\mathbf{x}$ di A.

1.1.9 Teorema (Weierstrass). *Se A è limitato e chiuso in $\mathbb{R}^N$ e se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ammette massimo e minimo su A, cioè esistono due punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ in A tali che*

$$f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_2) \qquad \forall \mathbf{x} \in A.$$

($\mathbf{x}_1$ si dice allora punto di minimo e $\mathbf{x}_2$ punto di massimo).

Concludiamo questo paragrafo col richiamare una importante proprietà di $\mathbb{R}^N$, (la *completezza*, come vedremo poi). Ricordiamo la definizione di successione di Cauchy.

1.1.10 Definizione. Sia $(\mathbf{a}_n)$ una successione in $\mathbb{R}^N$. Si dice che $(\mathbf{a}_n)$ *verifica la proprietà di Cauchy* - o più brevemente che $(\mathbf{a}_n)$ è di Cauchy - se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m| \le \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \bar{n}$$

(gli elementi di $(\mathbf{a}_n)$ "diventano arbitrariamente vicini tra loro al crescere dell'indice").

Non è difficile vedere che se $(\mathbf{a}_n)$ ammette limite allora essa verifica la proprietà di Cauchy. Anche il viceversa è vero, ma non è per nulla ovvio.

1.1.11 Teorema. *Sia $(\mathbf{a}_n)$ una successione in $\mathbb{R}^N$. Allora*

$$(\mathbf{a}_n) \text{ ammette limite} \Leftrightarrow (\mathbf{a}_n) \text{ è di Cauchy.}$$

Il teorema sopra riflette il fatto che $\mathbb{R}^N$ "non ha buchi": una successione di punti che si avvicinano tra loro non può sparire nel nulla. Questo non sarebbe vero se al posto di $\mathbb{R}$ ci fosse $\mathbb{Q}$. È facile infatti prendere una successione di numeri razionali che in $\mathbb{R}$ converge a $\sqrt{2}$ - tale successione è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ ma non converge a nulla in $\mathbb{Q}$.

1.2 Richiamo sulle serie numeriche

1.2.1 Definizione. Data una successione di numeri reali $(a_n)_{n\ge n_0}$ chiameremo *somma parziale* n-esima l'espressione

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

(che risulta definita per $n \ge n_0$). La (nuova) successione $(S_n)_{n\ge n_0}$ si chiama *serie* associata ad $(a_n)_{n\ge n_0}$ o più brevemente serie degli a_n.

Si dice che *la serie è convergente* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ ammette limite finito S, si dice che *la serie è divergente* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ tende a $\pm\infty$ e si dice che *la serie è indeterminata* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ non ha limite. Nel primo caso chiamiamo il limite S *somma della serie* e lo indichiamo con

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Molto spesso, con un leggero abuso, l'espressione $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ viene usata per indicare la serie oltre che la sua somma, per cui si usa dire: *la serie* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *è convergente/divergente/indeterminata.*

Diremo che la serie è *assolutamente convergente* se la serie $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

Ricordiamo il comportamento di alcune serie importanti.

1.2.2 Proposizione. *La* ***serie geometrica*** *di ragione A:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

- *è convergente per $|A| < 1$ e in tal caso ha come somma* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} = \dfrac{1}{1-A}$*;*
- *è divergente positivamente per $A \geq 1$;*
- *è indeterminata per $A \leq -1$.*

1.2.3 Proposizione. *La serie armonica di esponente α*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- *è convergente se $\alpha > 1$;*
- *è divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.*

Ricordiamo i principali risultati sulle serie.

1.2.4 Proposizione. *Se* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge, allora $a_n \to 0$.*

1.2.5 Proposizione. *Se una serie* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *ha tutti termini positivi* ($a_n \geq 0$) *allora non può essere indeterminata.*

Il risultato sopra ci autorizza a considerare **sempre** la somma di una serie a termini positivi a patto di ammettere che possa essere $+\infty$. Potremo quindi scrivere $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$ per dire che la serie converge (visto che $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ha senso). Questa scrittura non si può usare se gli a_n cambiano segno.

È chiaro che per quanto sopra basterebbe $a_n \geq 0$ per n grande (da un certo $\bar{n}$ in poi).

1.2.6 Proposizione (criterio del confronto per serie a termini positivi)**.** *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni di numeri positivi.*

Se $a_n \leq b_n$ *per ogni* n *(per ogni* n *grande), allora*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{diverge}$$

1.2.7 Proposizione (criterio del confronto asintotico)**.** *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni di numeri positivi.*

Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Allora, se $l \in]0, +\infty[$*:*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge,}$$

se $l = 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,}$$

mentre se $l = +\infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

I due criteri che seguono sono scritti in termine del limite superiore e del limite inferiore di opportune esprssioni; in prima istanza si può pensare che esista il limite delle quantità indicate cioè che $\liminf = \limsup$.

1.2.8 Proposizione (criterio della radice)**.** *Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Allora*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge}.$$

1.2.9 Proposizione (criterio del rapporto)**.** *Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Allora*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge}.$$

1.2.10 Proposizione (criterio della convergenza assoluta)**.** *Se una serie converge assoltamente essa converge. In altri termini, data una successione (a_n) si ha*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}.$$

Notiamo che, essendo la successione dei valori assoluti una successione di numeri positivi, possiamo anche scrivere:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}.$$

1.3 Numeri complessi

Ricordiamo che i numeri complessi sono espressioni del tipo $x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro tenendo presente che $(i)^2 = -1$. Si ha cioè:

$$\begin{aligned} &(x' + iy') + (x'' + iy'') = (x' + x'') + i(y' + y''),\\ &(x' + iy')(x'' + iy'') = x'x'' + i(x'y'' + x''y') + (i)^2 y'y'' =\\ &\qquad\qquad x'x'' - y'y'' + i(x'y'' + x''y'). \end{aligned}$$

L'insieme dei numeri complessi verrà indicato con $\mathbb{C}$. Se $z = x + iy$ si scrive

$$x = \Re e(z) \text{ (\textit{parte reale} di } z), \qquad y = \Im m(z) \text{ (\textit{parte immaginaria} di } z),$$

(si noti che la parte immaginaria è un numero reale); si definisce il *coniugato* di z, indicato con $\bar{z}$, ponendo $\bar{z} := x - iy$. In questo modo

$$\Re e(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \Im m(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Sempre se $z = x + iy$ si definisce il *modulo* di z, indicato con $|z|$, ponendo $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Si vede facilmente che

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Si verifica facilmente che:

$$\overline{z' + z''} = \overline{z'} + \overline{z''}, \quad \overline{z'z''} = \overline{z'}\ \overline{z''}, \quad |z'z''| = |z'||z''|.$$

Come è ben noto si può stabilire una corrispondenza tra i numeri complessi e il piano cartesiano (cioè tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$) identificando $x + iy$ con (x, y). Questa identificazione permette di visualizzare l'operazione di somma tra numeri complessi mediante l'usuale somma di punti (o meglio di vettori) fatta con la regola del parallelogramma. Per capire come funziona il prodotto introduciamo la *forma polare* di un numero complesso. Se $z = x + iy$ allora $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ appartiene alla circonferenza unitaria e quindi esiste unico un angolo θ in $[0, 2\pi[$ tale che

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Diremo che tale θ è l'*argomento principale* di z - in generale diremo che θ in $\mathbb{R}$ è un argomento di z se verifica la formula sopra e cioè se differisce dall'argomento principale per un multiplo intero relativo di 2π. Scriveremo in ogni caso, con un po' di ambiguità, $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ (a rigore $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$).

Allora se $z', z'' \in \mathbb{C}$, e se $z = z'z''$ si ha

$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z') + \mathrm{Arg}(z'').$$

(ciò significa che θ è un argomento di z se e solo se $\theta = \theta' + \theta''$ per θ' argomento di z' e θ'' argomento di z'').
In sostanza, mentre il modulo del prodotto è la somma dei moduli, l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti. Queste due proprietà giustificano la definizione di esponenziale complesso.

1.3.1 Definizione. Se $z = x + iy$ si definisce

$$e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Si vede facilmente che l'esponenziale complesso coincide con quello tradizionale quando $z \in \mathbb{R}$ (cioè se $y = 0$) e che

$$e^{z'+z''} = e^{z'}e^{z''} \qquad \forall z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Con l'introduzione dell'esponenziale complesso si può scrivere

$$z = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \rho = |z|, \theta = \mathrm{Arg}(z).$$

Si può anche notare che $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ e che

$$\cos(\theta) = \Re e(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \Im m(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(formule che useremo spesso nel seguito).

Osserviamo infine che la corrispondenza tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ permette di definire le nozioni di limite e di continuità per funzioni definite su $\mathbb{C}$ o a valori in $\mathbb{C}$. Si verifica facilmente che vale il fatto seguente.

1.3.2 Proposizione. *Se $\rho_n \to \rho$ e $\theta_n \to \theta$ allora $\rho_n e^{i\theta_n} \to \rho e^{i\theta}$.*

1.3.3 Esempio. Dato z in $\mathbb{C}$ definiamo la successione (z_n) in $\mathbb{C}$ ponendo

$$z_n := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Dimostriamo che $z_n \to e^z$. Scriviamo $z = x + iy$ Allora

$$|z_n|^2 = z_n\overline{z_n} = \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x-iy}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^n =$$
$$e^{n\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)} = e^{n\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}+o\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2x+o(1)} \to e^{2x}.$$

(si è sfruttata la formula di Taylor $\ln(1+t) = t + o(t)$). Quindi passando alla radice

$$|z_n| \to e^x.$$

Cerchiamo un argomento θ_n per z_n; osserviamo che l'argomento principale di $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{z}{n} + i\frac{y}{n}$ è pari a $\arctan\left(\frac{y/n}{1+x/n}\right)$ e quindi, passando alla potenza n-esima, possiamo prendere

$$\theta_n = n\arctan\left(\frac{y/n}{1+x/n}\right) = n\left(\frac{y/n}{1+x/n} + o\left(\frac{y/n}{1+x/n}\right)\right) =$$
$$\frac{y}{1+x/n} + o(1) \to y$$

(perché $\arctan(t) = t + o(t)$). In definitiva:

$$z_n = |z_n|e_n^{\theta} \to e^x e^{iy} = e^z.$$

Capitolo 2

Successioni e serie di funzioni

2.1 Convergenza puntuale e uniforme

Supponiamo che A sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ e supponiamo che per ogni intero n sia data una funzione $f_n : A \to \mathbb{R}^M$. Diremo in questo caso che (f_n) è una successione di funzioni da A in $\mathbb{R}^M$. In quanto segue, per visualizzare le definizioni, si consiglia di pensare inizialmente al caso $N = M = 1$.

2.1.1 Definizione. Diciamo che la successione (f_n) *converge puntualmente* in un punto x_0 di A se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Diciamo che (f_n) *converge puntualmente su* A se (f_n) converge puntualmente in ogni x_0 di A. È chiaro che in quest'ultimo caso siamo autorizzati a considerare la funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ definita da

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

e potremo quindi dire che (f_n) converge puntualmente a f (in forma abbreviata scriveremo $f_n \to f$ puntualmente o anche $f_n \xrightarrow{punct} f$).

2.1.2 Definizione. Data la successione di funzioni (f_n) e una funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ diciamo che f_n converge *uniformemente su* A a f se si ha:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Se introduciamo la *norma uniforme* di una funzione f (sull'insieme A) mediante

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,A} := \sup_{x\in A} |f(x)|$$

allora la convergenza uniforme si può esprimere dicendo che f_n converge uniformente a f se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

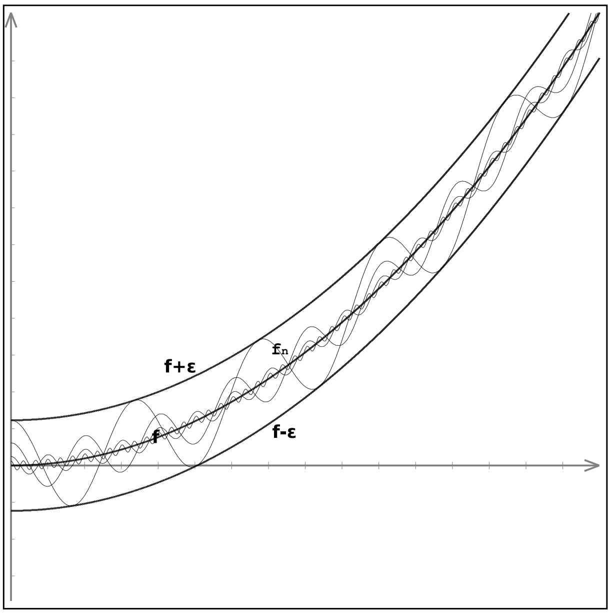

Figura 2.1: convergenza uniforme

Per indicare che f_n converge uniformemente a f, useremo la notazione $f_n \to f$ uniformemente (su A), o anche $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$ (su A).

Notiamo che l'espressione introdotta sopra, che abbiamo chiamato norma, non è necessariamente finita (può essere $+\infty$). Essa è finita se e solo se f è limitata su A, per esempio se A è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^N$ e f è continua. Vedremo le motivazione del termine "norma" nei prossimi paragrafi.
È comunque vero in ogni caso che se $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$ $\|f_n - f\|$ **deve** essere finito e tendere a zero.

2.1.3 Osservazione. Un modo di visalizzare la convergenza uniforme é di dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, il grafico delle f_n é *definitivamente* compreso tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$ (vedi figura 2.1).

La seguente proprietà è una semplice conseguenza delle definizioni.

2.1.4 Proposizione. *Se f_n converge uniformemente a f su A, allora f_n connverge puntualmente su A.*

La proposizione precedente dice che se f_n converge uniformemente a qualcosa, questo qualcosa deve essere il limite puntuale delle f_n: il limite puntuale **individua** il candidato limite uniforme.
La proposizione non è invertibile come mostrano i vari esempi che seguono.

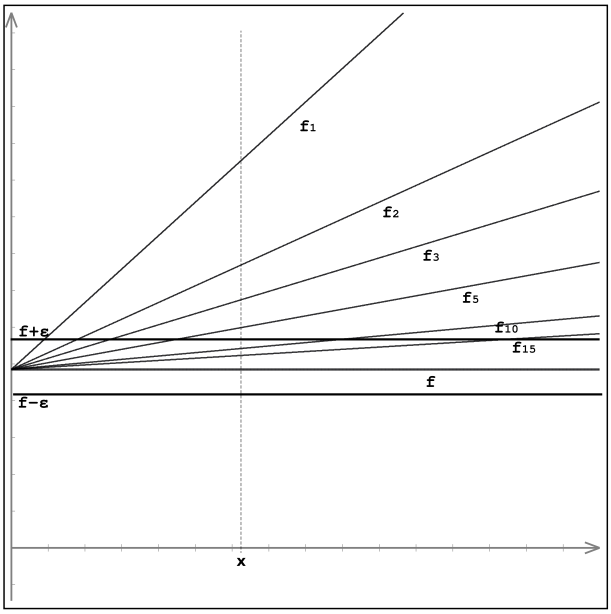

Figura 2.2: $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$

2.1.5 Esempio. Consideriamo $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$. Si vede subito che, dato x in $\mathbb{R}$, $f_n(x) \to 1$ e dunque f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione f che vale costantemente 1. Si vede abbastanza facilmente però che f_n non converge uniformemente su $\mathbb{R}$ a f. Si vede infatti che non c'é nessun intero n per cui il grafico di f_n é *tutto* tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$ dato che ogni retta di equazione $y = 1 + \dfrac{x}{n}$ va all'infinito e quindi supera $1 + \varepsilon$ per x abbastanza grande (vedi figura 2.2). In particolare $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$ e dunque non é possibile che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
In sostanza, anche se a x fissato $f_n(x) \to 1$, la *velocitá di convergenza* dipende da x (e peggiora tanto piú x é grande) e non é quindi *uniforme* rispetto a x.

Notiamo che se invece di prendere le f_n su tutto $\mathbb{R}$ consideriamo $A; = [0, 1]$ (o un qualunque interallo limitato), allora $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} 1$ su A. Infatti

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{0 \le x \le 1} |1 + x/x - 1| = \max_{0 \le x \le 1} x/n = \frac{1}{n} \to 0$$

Dunque le f_n non convergono uniformemente a 1 su $\mathbb{R}$ ma convergono uniformemente a 1 su ogni intervallo $[a, b]$.

2.1.6 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := e^{-nx}$ definite su $A := [0, +\infty[$ (vedi

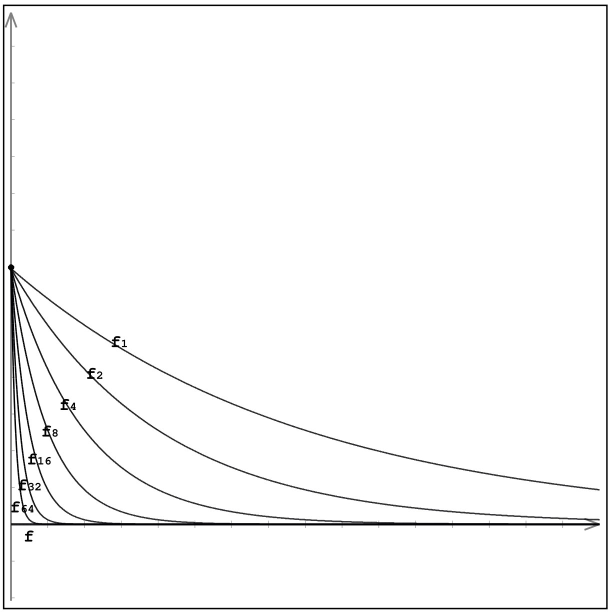

Figura 2.3: $f_n(x) = e^{-nx}$

la figura 2.3).

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

cioè f_n converge puntualmente alla funzione f che vale zero su $]0, +\infty[$ e vale uno in zero. Però f_n non converge uniformente a f in quanto, *per ogni* n

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\geq 0} |e^{-nx} - f(x)| = \sup_{x>0} |e^{-nx}| = 1$$

che non tende a zero. Notiamo che le f_n sono tutte funzioni continue mentre il loro limite puntuale f non è continua in 0 dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)(=0) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1(=1)$$

2.1.7 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := ne^{-nx}$ definite su $A :=]0, +\infty[$ (vedi la figura 2.4). Anche in questo caso $f_n(x) \to 0$ per ogni $x > 0$ (anche se c'è un n a moltiplicare l'esponeziale e^{-nx} "vince"); notiamo che non abbiamo messo lo zero in A (altrimenti $f_n(0) \to +\infty$). Quindi le f_n tendono puntualmente a zero su A. Anche stavolta la convergenza non è uniforme, si vede infatti che, per ogni n

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x>0} |ne^{-nx}| = n$$

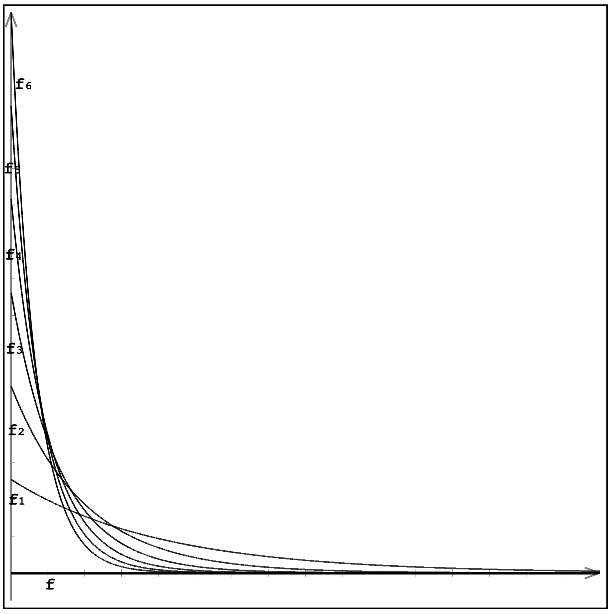

Figura 2.4: $f_n(x) = ne^{-nx}$

che addirittura tende all'infinito. Notiamo che

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} ne^{-nx}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1$$

e quindi l'integrale delle f_n non tende all'integrale della funzione limite (che sarebbe zero).

Si potrebbe ritenere che questo dipenda dal fatto che A è un intervallo aperto, oppure che A non è limitato. In realtà, con un po' di pazienza, si può costruire un esempio analogo su $[0,1]$; prendiamo infatti $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g_n(x) := \begin{cases} ne^{-nx} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ \frac{n^2}{e}x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

(vedi la figura 2.5). Come prima, per x fissato, $g_n(x) \to 0$. Infatti se $x = 0$ $g_n(0) = 0 \to 0$, mentre se $x > 0$ per n grande $g_n(x) = f_n(x) \to 0$. D'altra parte

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} ne^{-1}x\,dx + \int_{1/n}^1 ne^{-nx}\,dx =$$

$$\left[ne^{-1}\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/n} + \left[n\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_{1/n}^1 = \frac{e^{-1}}{2n} - e^{-n} + e^{-1} \to e^{-1} \neq 0$$

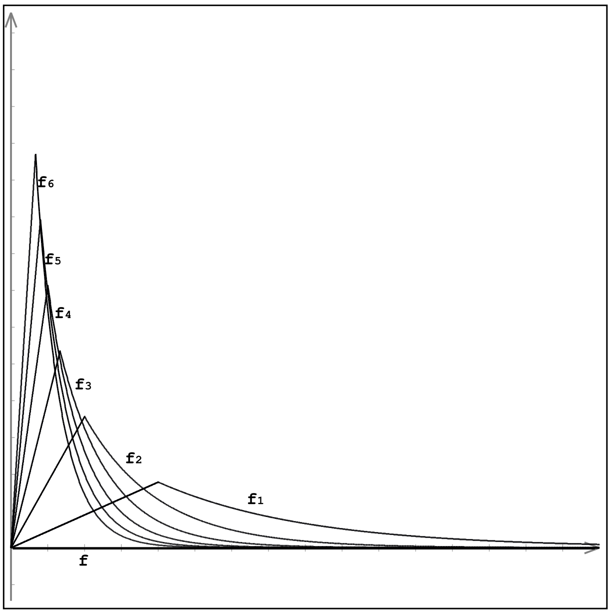

Figura 2.5: $g_n(x)$

e quindi di nuovo l'integrale delle g_n non tende all'integrale del limite puntuale (che sarebbe zero).

Questi esempi mostrano che la convergenza puntuale *non va d'accordo* coi limiti e con gli integrali. Mostriamo ora che, al contrario, la convergenza uniforme si comporta bene.

2.1.8 Teorema. *Siano $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, $f : A \to \mathbb{R}^M$ e supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in A. Sia x_0 un punto di accumulazione per A e supponiamo che per ogni n esista $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$ che indichiamo con l_n. Allora*

1. *esiste $l = \lim\limits_{n \to \infty} l_n$;*
2. *si ha che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$*

In sostanza si può dire che

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che gli l_n hanno limite. Per questo mostreremo che la successione (l_n) verifica la proprietà di Cauchy. Fissiamo n e m; dato che, per ogni x di A

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

facendo tendere x a x_0 si ottiene:

$$|l_n - l_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty .$$

Siccome $f_n \xrightarrow{unif} f$, cioè $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, é chiaro che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che, se $n, m \geq \bar{n}$, si ha $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Dalla disuguaglianza sopra segue allora che (l_n) é di Cauchy.
Dunque possiamo trovare un l in $\mathbb{R}^M$ tale che $l_n \to l$.

Mostriamo ora che $f(x) \to l$ per $x \to x_0$. Per questo prendiamo una successione (x_k) in A, con $x_k \to x_0$ e mostriamo che $f(x_k) \to l$ per $k \to \infty$. Dato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\bar{n}$ tale che per tutti gli $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{e} \qquad |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Fissiamo ora un $n_0 \geq \bar{n}$ (per esempio lo stesso $\bar{n}$); dato che $f_{n_0}(x_k) \to l_{n_0}$, possiamo trovare $\bar{k}$ tale che

$$|f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq \bar{k}.$$

Prendiamo allora $k \geq \bar{k}$; si ha:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - l| \leq |f(x_k) - f_{n_0}(x_k)| + |f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| \leq \\ \|f - f_{n_0}\| + |f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Essendo ε arbitrario abbiamo dimostrato che $f(x_k) \to l$, cioè la tesi. □

Come conseguenza ricaviamo subito il seguente risultato

2.1.9 Teorema. *Siano (f_n) ed f tali che $f_n \xrightarrow{unif} f$ su A e sia $x_0 \in A$. Se tutte le f_n sono continue in x_0, allora f è continua in x_0. Se ne ricava che se le f_n sono continue su A, anche la f è continua su A.*

Dimostrazione. Basta notare che per ogni n $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ e applicare il teorema precedente con $l_n = f_n(x_0)$. □

2.1.10 Teorema. *Siano (f_n) ed f tali che $f_n \xrightarrow{unif} f$ su A, supponiamo che le f_n e la f siano integrabili su A e che la misura (o volume) di A (che indichiamo con $|A|$) sia finita. Allora*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx$$

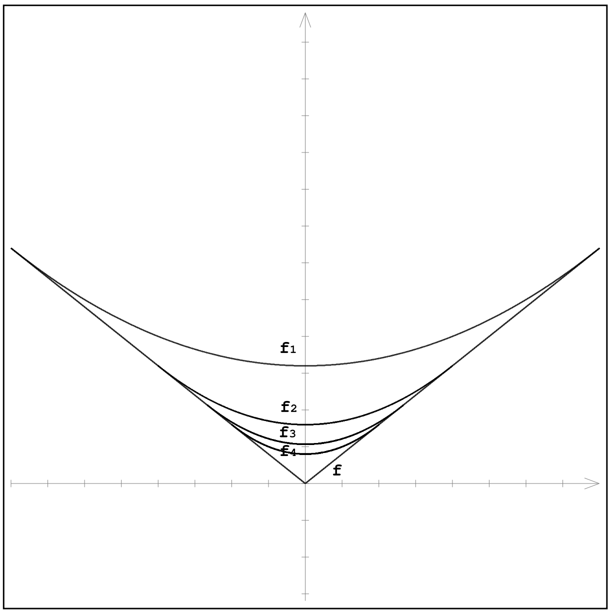

Figura 2.6: approssimazioni derivabili di $|x|$

Dimostrazione. Si ha:

$$\left|\int_A f_n(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx\right| = \left|\int_A (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq$$
$$\int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_A \|f_n - f\|_\infty\,dx = |A|\,\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

□

2.1.11 Esempio. Contrariamente all'integrazione l'operazione di derivata *non va d'accordo* con la convergenza uniforme. Per esempio se consideriamo le funzioni $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definite da:

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2}x^2 + \dfrac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(vedi la figura 2.6) si vede che f_n è derivabile e che

$$f_n'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \\ n & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{se } x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

Non è difficile verificare che $f_n \stackrel{unif}{\longrightarrow} f$, dove $f(x) = |x|$ ed è chiaro che f non è derivabile in zero. Quindi è possibile che funzioni derivabili convergano ad una non derivabile. Vale però il seguente risultato.

2.1.12 Teorema. *Supponiamo che I sia un intervallo in $\mathbb{R}$ e che $f_n : I \to \mathbb{R}$ sia una successione di funzioni derivabili su I con derivata f_n' continua su I. Supponiamo che ci siano due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ per cui:*

$$f_n \to f \quad \textit{puntualmente} \qquad f_n' \to g \quad \textit{uniformemente}$$

(ne segue che g è continua). Allora f è derivabile e $f' = g$.

Dimostrazione. Siano x_0 e x due punti in I. Allora per il teorema del calcolo integrale:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt$$

Se facciamo tendere n all'infinito $f_n(x_0) \to f(x_0)$ e $f_n(x) \to f(x)$, per la convergenza puntuale di f_n a f. D'altra parte per la convergenza uniforme delle f_n' a g e per il teorema (2.1.10) si ha che:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \to \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

e quindi l'eguaglianza sopra passa al limite:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \qquad \forall x \text{ in } I$$

Di nuovo per il teorema fondamentale del calcolo questo implica $f' = g$. $\square$