Ingegneria Aerospaziale. Analisi 1.
Esempio di secondo compitino

1. Siano f e g due funzioni definite in un intorno di zero tali che $f(x) = 1 + x - 2x^2 + o(x^2)$ e $g(x) = 1 + 2x + x^2 + o(x^2)$ Posto $h(x) = f(x)g(x)$ si ha: (punteggio $4/-1$)

$h''(0) =$

$\frac{1}{2}$	1	-1	-2	non è calcolabile	N.D.P.

2. Il coefficiente di ordine 6 dello sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \sin(x^2)$ è (punteggio $2/-0.5$)

0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$	N.D.P.

3. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC). (punteggio $2/-1$ per esercizio)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n3^n} \; \boxed{\text{AC}}\boxed{\text{C}}\boxed{\text{NC}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2} \; \boxed{\text{AC}}\boxed{\text{C}}\boxed{\text{NC}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} \; \boxed{\text{AC}}\boxed{\text{C}}\boxed{\text{NC}}.$$

4. Sia $y(x)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Allora $y(\pi)$ vale (punteggio $2/-0.5$)

0	1	$\pi - 1$	π	$1 - \pi$	N.D.P.

5. La serie (dipendente dal parametro α in $\mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) - 1 \right)$$

converge se e solo se (punteggio $4/0$) α ____________ / $\boxed{\text{per nessun } \alpha}$.

6. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (punteggio $5/0$)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1}\, dx = \underline{\hspace{8cm}} \;/\; \boxed{\text{non esiste}}.$$

7. Si consideri l'equazione differenziale DA SVOLGERE (12 punti complessivi)

$$y' = \frac{x}{1+x^2} y - x^3 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.
   (b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.
   (d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) l'equazione $y(x) = 2$ ha due soluzioni.