Nota integrativa sulle serie

Claudio Saccon

1 Serie a termini positivi

1.1 Definizione. Se $(a_n)_{n\geq n_0}$ è una successione di numeri reali si chiama *somma parziale* n-esima:

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

La (nuova) successione $(S_n)_{n\geq n_0}$ si chiama *serie* associata ad $(a_n)_{n\geq n_0}$ o serie degli a_n.
Si dice che *la serie è convergente o sommabile* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ ammette limite finito S, si dice che *la serie è divergente* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ tende a $\pm\infty$ e si dice che *la serie è indeterminata* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ non ha limite.

Consideriamo in questo paragrafo il caso in cui i termini a_n della serie sono **positivi**: $a_n \geq 0$. Allora è facile constatare che (S_n) è una successione crescente. Ne segue per un teorema noto che (S_n) ammette limite, finito o $+\infty$. Chiamiamo tale limite *somma della serie degli* a_n e lo indichiamo con $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Dunque una serie **a termini positivi** converge se e solo se la sua somma (che esiste certamente) è finita:

$$\text{la serie degli } a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Studiamo il comportamento di alcune serie importanti.

1.2 Proposizione. *La* ***serie geometrica*** *di ragione $A \geq 0$ ha la somma (vedi libro):*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-A} < +\infty & \textit{se } 0 \leq A < 1, \\ +\infty & \textit{se } A \geq 1. \end{cases}$$

1.3 Proposizione. *La serie armonica di esponente α:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} < +\infty & \textit{se } \alpha > 1, \\ = +\infty & \textit{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Il carattere della serie armonica si può dedurre dal seguente principio.

1.4 Proposizione. *Sia $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione decrescente (e positiva). Definiamo $a_n := f(n)$. Allora la sommabilità della serie degli a_n equivale all'integrabilità in senso improprio di f:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\, dx < +\infty.$$

Dimostrazione. Introduciamo la funzione "a scalini" g definita da

$$g(x) := f([x]) = f(n) \text{ dove } n \text{ è l'intero tale che } n \leq x < n+1.$$

Dato che $x-1<[x]\le x$ per ogni x e che f è decrescente si trova subito che

$$f(x)\le g(x)\le f(x-1) \qquad \text{per ogni } x\ge 2 \tag{1}$$

Dato che $f\ge 0$ si ha $g\ge 0$ e quindi

$$\int_1^\infty g(x)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_1^c g(x)dx=\lim_n\int_1^{n+1}g(x)dx=\lim_n\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}g(x)\,dx=\lim_n\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{n=1}^\infty a_n.$$

Dunque la sommabilità di a_n equivale all'integrabilità di g; quest'ultima equivale all'integrabilità di f per la proprietà (1) e per il criterio del confronto per gli integrali impropri. $\square$

Ricordiamo i principali criteri di convergenza per le serie a termini positivi (per la dimostrazione vedi il libro)

1.5 Proposizione. *Se* $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ *converge, allora* $a_n\to 0$.

1.6 Proposizione (criterio del confronto)**.** *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni di numeri positivi. Se* $a_n\le b_n$ *per ogni* n *(per ogni* n *grande), allora*

$$\sum_{n=n_0}^\infty b_n \text{ converge} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ diverge} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=n_0}^\infty b_n \text{ diverge}$$

1.7 Proposizione (criterio del confronto asintotico)**.** *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni di numeri positivi. Supponiamo che*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$$

Allora, se $l\in]0,+\infty[$*:*

$$\sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ converge}\Leftrightarrow\sum_{n=n_0}^\infty b_n \text{ converge},$$

se $l=0$

$$\sum_{n=n_0}^\infty b_n \text{ converge}\Rightarrow\sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ converge},$$

mentre se $l=+\infty$

$$\sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ converge}\Rightarrow\sum_{n=n_0}^\infty b_n \text{ converge}.$$

1.8 Proposizione (criterio della radice)**.** *Sia* (a_n) *una successione di numeri positivi. Allora*

$$\exists\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}<1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ converge},$$

$$\exists\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}>1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ diverge}.$$

1.9 Proposizione (criterio del rapporto)**.** *Sia* (a_n) *una successione di numeri positivi. Allora*

$$\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ converge},$$

$$\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=n_0}^\infty a_n \text{ diverge}.$$

1.10 Osservazione. Notiamo che (cosa che sarà utile in seguito)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0.$$

Infatti se $S_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ si ha $\sum_{i=k}^{n} a_i = S_n - S_{k-1}$ da cui

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{k-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - S_{k-1}$$

da cui, se la serie degli a_n ha somma finita

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \lim_{k\to+\infty} S_{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

Enunciamo, senza darne la dimostrazione, l'estensione al caso delle serie a termini positivi delle proprietà standard delle somme finite.

1.11 Definizione. Sia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una applicazione bigettiva tra i numeri interi (una "permutazione degli interi"). Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ chiamiamo *riordinamento della serie* mediante σ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$

1.12 Proposizione (proprietà commutativa delle serie)**.** *Se $a_n \geq 0$ per ogni n, allora (ammettendo anche valore $+\infty$)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

1.13 Definizione. Sia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una applicazione strettamente crescente tra i numeri interi con $\sigma(0) = 0$. Data una successione (a_n) consideriamo la successione $b_k := \sum_{n=\sigma(k)}^{\sigma(k+1)-1} = a_{\sigma(k)} + a_{\sigma(k)} + \cdots + a_{\sigma(k+1)} - 1$. Possiamo dire che b_k è il risultato del "raggruppamento" dei termini di a_n per n tra $\sigma(k)$ (compreso) e $\sigma(k+1)$ (escluso). La serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ si dice allora *ottenuta da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ associando i termini secondo σ.*

1.14 Proposizione (proprietà associativa delle serie)**.** *Se $a_n \geq 0$ per ogni n e sia (b_k) ottenuta da (a_n) raggruppando i termini secondo una data σ. Allora (ammettendo anche valore $+\infty$)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

1.15 Definizione (prodotto di Cauchy)**.** Date due successioni (a_n) e (b_n) definiamo la successione (c_n) mediante

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

La successione (c_n) si dice *prodotto alla Cauchy* tra (a_n) e (b_n); analogamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ si dice *serie prodotto alla Cauchy* delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

1.16 Proposizione. *Se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ per ogni n, e se (c_n) è il prodotto di Cauchy tra (a_n) e (b_n), allora (ammettendo anche valore $+\infty$)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Dimostrazione. Poniamo

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Sappiamo che (ammettendo anche valori infiniti)

$$A_n \to A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad B_n \to B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \qquad C_n \to C := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

D'altra parte, per la positività degli addendi

$$A_n B_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k,h=0}^{n} a_k b_h \leq \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq k,h \leq 2n \\ k+h=n}} a_k b_h}_{=C_n} \leq \sum_{k,h=0}^{2n} a_k b_h = \sum_{k=0}^{2n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k A_{2n} B_{2n}$$

dove il fatto che $C_n = \sum_{\substack{0 \leq k,h \leq 2n \\ k+h=n}} a_k b_h$ si capisce considerando che le possibili coppie (h,k) tali che $0 \leq h + k \leq n$ si possono raggruppare in quelle in cui $h + k = 0$ (cioè solo $(h,k) = (0,0)$), quelle in cui $h + k = 1$ (cioè $(h,k) = (0,1)$ e $(h,k) = (1,0)$) e così via fino a quelle in cui $h + k = n$. In sostanza

$$\sum_{\substack{0 \leq k,h \leq 2n \\ k+h=n}} a_k b_h = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{k} a_h b_{k-h} = \sum_{k=0}^{n} c_k = C_n.$$

Dato che $A_n B_n \to AB$ e $A_{2n} B_{2n} \to AB$, per il teorema dei carabinieri anche $C_n \to AB$. $\square$

2 Serie a segno variabile

Consideriamo ora il caso di una successione (a_n) del cui segno non sappiamo nulla. differenza del caso in cui $(a_)$ è a termini positivi (o negativi) non è detto che abbia senso considerarne la somma, visto che la sucessione delle somme parziali può anche non avere limite (la serie può essere indeterminata). Studieremo dei criteri (sostanzialmente due) sulla successione (a_n) che assicurano che la serie degli a_n è convergente (senza preoccuparci di distinguere, nei casi in cui la serie risulti non convergente, se essa diverga ose sia indeterminata).
Vale ancora la condizione necessaria

2.1 Proposizione. *Sia (a_n) una successione. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \to 0$.*

Un primo criterio di convergenza consiste nel passare alla serie dei valori assoluti.

2.2 Proposizione (criterio della convergenza assoluta)**.** *Sia (a_n) una successione. Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*

Dimostrazione. Vedi libro. $\square$

2.3 Definizione (convergenza assoluta)**.** Sia (a_n) una successione. Diremo che la serie degli a_n converge assolutamente se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$

Con la definizione introdotta criterio della convergenza assoluta diventa:

$$\text{se la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ è assolutamente convergente allora è convergente.}$$

La nozione di serie assoluamente convergente è dunque più forte di quella di serie convergente. Vedremo più avanti un esempio di serie convergente, ma non assoluamente convergente. Mettiamo ora in evidenza che le serie assolutamente convergenti hanno tutte le "buone proprietà" delle serie a termini positivi.

2.4 Proposizione (proprietà delle serie assolutamente convergenti)**.** *Sia (a_n) una successione. Se la serie associata ad a_n è è assolutamente convergente allora valgono le proposizioni 1.12 (proprietà commutativa), 1.14 (proprietà associativa) e 1.16 (prodotto di Cauchy).*

Si potrebbe far vedere che tali proprietà non valgono se invece la serie degli a_n è convergente, ma non assolutamente convergente. A titolo di esempio riportiamo un risultato, per certi versi sorprendente, di cui non diamo la dimostrazione.

2.5 Proposizione. *Supponiamo che $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente, ma non assolutamente convergente. Allora preso un qualunque numero l in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ è possibile trovare una permutazione degli interi σ tale che il riordinamento della serie secondo σ abbia somma l:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = l.$$

Uno dei vantaggi del passaggio alla convergenza assoluta è che, essendo la serie dei moduli una serie a termini positivi è possibile utilizzare per studiarla i vari criteri introdotti nel paragrafo precedente.

2.6 Esempio. Si voglia determinare se la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ è convergente. Dato che

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n$$

e che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

si deduce che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| < +\infty$$

cioè la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ è assolutamente convergente e quindi convergente. Notiamo che sarebbe sbagliato scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} < +\infty$$

se non si sapesse a priori che la somma ESISTE - cosa che non è garantita, non essendo la serie a termini positivi.

L'altro criterio per trattare serie a segno variabile è il criterio di Leibniz.

2.7 Proposizione (criterio di Leibniz). *Sia (a_n) una successione di numeri positivi: $a_n \geq 0$ per ogni n. Consideriamo la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n. \tag{2}$$

Una serie di questo tipo si chiama a segni alterni *(in quanto i suoi termini $(-1)^n a_n$ sono alternativamente positivi (se n è pari) e negativi (se n è dispari).*

Se (a_n) è decrescente: $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$, e se $a_n \to 0$, allora la serie (2) converge.

Dimostrazione. Vedi libro. □

2.8 Esempio. Per qualunque $\alpha > 0$ la serie armonica a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n^\alpha}$$

è convergente, come immediata conseguenza del criterio di Leibniz (basta osservare che $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \to 0$). Dato che, come sappiamo la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $\alpha \leq 1$ possiamo concludere che, per $0 < \alpha \leq 1$ la serie armonica a segni alterni è **convergente ma non assolutamente convergente**.

Diamo l'idea di come sarebbe possibile riordinare la serie armonica a segni alterni $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$ in modo da renderla divergente a $+\infty$. Definiamo la permutazione $\sigma : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (gli indici della serie arminica partono da uno) ponendo:

$$\sigma(k) = \begin{cases} 2n+1 & \text{se } k = n + 2^n \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 2(k-n) & \text{se } n - 1 + 2^{n-1} < k < n + 2^n \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Proviamo a scrivere i primi valori di σ:

$$\begin{aligned} &\sigma(1) = 1 \text{ (perché } 1 = 0 + 2^0), \\ &\sigma(2) = 2, \sigma(3) = 3 \text{ (perché } 3 = 1 + 2^1), \\ &\sigma(4) = 4, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 5 \text{ (perché } 6 = 2 + 2^2), \\ &\sigma(7) = 8, \sigma(7) = 10, \sigma(7) = 12, \sigma(8) = 14, \sigma(11) = 7 \text{ (perché } 11 = 3 + 2^3), \\ &\sigma(12) = 8, \sigma(13) = 10, \sigma(14) = 12, \sigma(15) = 14, \sigma(16) = 8, \\ &\qquad \sigma(17) = 10, \sigma(18) = 12, \sigma(19) = 14, \sigma(20) = 9 \text{ (perché } 20 = 4 + 2^4) \ldots \end{aligned}$$

In sostanza σ prende nell'ordine: un dispari, un pari, un dispari, due pari, un dispari, quattro pari,..., un dispari, 2^n pari e così via. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+2^n} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} + \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2j} = -1 - \frac{1}{3} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{n} \sum_{2^{h-1} < j \leq 2^h} \frac{1}{j} \geq \\ -1 - \frac{1}{3} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{n} \sum_{2^{h-1} < j \leq 2^h} \frac{1}{2^h} = \\ -1 - \frac{1}{3} - \frac{n-1}{5} + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{n} \frac{2^{h-1}}{2^h} = -1 - \frac{1}{3} - \frac{n-1}{5} + \frac{n+1}{4} \to +\infty. \end{aligned}$$

Bisognerebbe poi considerare $\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)}$ per m generico e non del tipo $n + 2^n$, ma su questo punto tralasciamo i dettagli.

3 Serie di potenze

In questo paragrafo studiamo serie del tipo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ dove sono assegnate (a_k) una succesione di numeri reali e un numero reale $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre x varierà in (opportuni sottoinsiemi di) $\mathbb{R}$. Per semplicità consideriamo sempre $x_0 = 0$, dato che il caso con $x_0 \neq 0$ è perfettamente analogo. Studieremo dunque per quali x ha senso considerare

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

cioè per quali x la serie scritta destra converge, definendo così una funzione $f(x)$, e che proprietà ha la f così costruita

Le serie del tipo sopra indicato si chiamano *serie di potenze* o serie di Taylor.

3.1 Teorema. *Supponiamo che esista*

$$l := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(in generale $l \in [0, +\infty]$). Poniamo

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0, \\ \dfrac{1}{m} & \text{se } l \in]0, \infty[, \\ 0 & \text{se } l = +\infty. \end{cases}$$

allora:

1. *per ogni x con $|x| < \bar{r}$ la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente (e quindi converge);*
2. *per ogni x con $|x > \bar{R}$ la serie non converge.*

si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda nei punti $x = \pm\bar{R}$.

3.2 Definizione. Data la successione (a_n) in $\mathbb{R}$ chiamiamo *raggio di convergenza* della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ il numero $\bar{R}$ (in $[0, +\infty]$) ottenuto nel teorema (3.1).

Risulta quindi definita la funzione $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per ogni x in $] -\bar{R}, \bar{R}[$. Tale intervallo aperto viene detto *intervallo di convergenza*per la serie (se $\bar{R} = 0$ tale intervallo è vuoto, se $\bar{R} = +\infty$ esso coincide con $\mathbb{R}$).

3.3 Osservazione. Il raggio di convergenza è stato definito solo se esiste il limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ – in realtà si potrebbe vedere che c'è sempre un numero $\bar{R}$ con le proprietà dette sopra (usando il "massimo limite" invece del limite) e quindi il raggio di convergenza si può definire sempre.

3.4 Proposizione (continuità delle serie di potenze)**.** *La funzione*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

è (ben definita e) continua nel suo intervallo di convergenza.

Dimostrazione. Sia $\bar{R}$ il raggio di convergenza e sia x_0 un punto di $] -\bar{R}, \bar{R}[$; vogliamo dimostrare che f è continua in x_0. Fissiamo un numero $R > 0$ tale che $|x_0| < R < \bar{R}$ e scegliamo

un arbitrario $\varepsilon > 0$
(1) Possiamo trovare un intero $\bar{n}$ tale che

$$\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n| R^n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(2) Poniano $g(x) := \sum_{n=0}^{\bar{n}} a_n x^n$. Dato che g è continua possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Possiamo anche supporre che $\delta < \bar{R} - R$, di modo che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in]-R, R[$.
(3) Prendiamo un qualunque x con $|x - x_0| < \delta$ (e quindi $x \in]-R, R[$); allora:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - g(x) + g(x) - g(x_0) + g(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$|f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| = \left| \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} a_n x^n \right| + |g(x) - g(x_0)| + \left| \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} a_n x_0^n \right| \leq$$

$$\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n||x|^n + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n||x_0|^n \leq \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n| R^n + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n| R^n < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; questo vuol dire che f è continua in x_0. Dato che x_0 è un punto qualunque in $]-\bar{R}, \bar{R}[$ abbiamo dimostrato che f è continua in $]-\bar{R}, \bar{R}[$. $\square$

3.5 Proposizione (integrazione per serie)**.** *Siano a, b reali tali che $[a, b] \subset]-\bar{R}, \bar{R}[$ dove $\bar{R}$ è il raggio di convergenza della serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n\, dx$$

Dimostrazione. Dato k intero poniamo $f_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n$. Dato che $[a, b] \subset]-\bar{R}, \bar{R}[$ possiamo trovare un numero R tale che $0 < R < \bar{R}$ e $[a, b] \subset [-R, R]$. Allora

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_k(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f_k(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_k(x)|\, dx =$$

$$\int_a^b \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n x^n \right| dx \leq \int_a^b \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n||x|^n\, dx \leq \int_a^b \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| R^n\, dx = (b - a) \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| R^n$$

Facendo tendere k all'infinito l'ultimo termine scritto tende a zero. Dunque

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \int_a^b x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n\, dx.$$

$\square$

3.6 Proposizione (derivazione per serie)**.** *La serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è derivabile in ogni punto del suo intervallo di convergenza e vale*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \forall x \in]-\bar{R}, \bar{R}[,$$

dove la serie scritta a destra nella formula sopra (che è anche lei una serie di potenze) ha anch'essa raggio di convergenza $\bar{R}$.

Dimostrazione. Poniamo $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. Anche g è una serie di potenze e il suo raggio di convergenza R' si trova facendo

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{\bar{R}}$$

dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$, dove $\bar{R}$ indica il raggio di convergenza di f. Dunque f e g hanno il medesimo intervallo di convergenza $]-\bar{R}, \bar{R}[$. Fissiamo un qualunque x in tale intervallo. Integrando per serie la g si trova

$$\int_0^x g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x nt^{n-1}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = f(x) - f(0).$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale (g è continua !), ciò significa che f è derivabile e che $f' = g$. □

Iterando il risultato precedente si ottiene una regolarità maggiore.

3.7 Proposizione. *La serie di potenze* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *è derivabile infinite volte nel suo intervallo di convergenza e risulta:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x)^{n-k} \qquad \forall z \textit{ in }]\bar{R}, \bar{R}[. \tag{4}$$

Inoltre la serie (delle derivate) scritta sopra ha lo stesso raggio di convergenza $\bar{R}$ *della serie di partenza.*

3.8 Osservazione. Se mettiamo $x = 0$ nella formula (4), otteniamo:

$$f^{(k)}(0) = a_k k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

cioè f (in $]-\bar{R}, \bar{R}[$) *è somma alla sua serie di Taylor.*

3.9 Esempio. consideriamo la serie $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. allora il raggio di convergenza è 1 dato che $\sqrt[n]{1} \to 1$. peraltro si sa che:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \to \frac{1}{1-x} \qquad \text{se } |x| < 1$$

e quindi $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ per ogni x con $|x| < 1$.

consideriamo ora un'altra serie $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$. anche questa serie ha raggio di convergenza 1 dato che $\sqrt[n]{1/n} \to 1$. notiamo che $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^n}{n} = x^{n-1}$ e dunque

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x).$$

in altre parole g è una primitiva di f, cioè $g(x) = \ln(1-x) + c$ per c costante. ma calcolando tutto in $x = 0$ si trova $0 = g(0) = c$ e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x) \qquad \text{se } -1 < x < 1.$$

consideriamo una terza serie: $h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. anch'essa ha raggio di convergenza 1 perché $\sqrt[n]{n} \to 1$. si ha

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = xf'(x)$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{se } -1 < x < 1.$$

3.10 Esempio. consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. questa serie ha raggio di convergenza 1. in questo caso in verità non esiste $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ perché si ha:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ 0 & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

però il massimo limite fa 1, come si vede passando alla sottosuccessione $\sqrt[2k]{|a_{2k}|}$. si vede facilmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{se } |x| < 1.$$

quindi la serie converge a $\frac{1}{1+x^2}$ per le x in $\{|x| < 1\}$. guardando la cosa dal punto di vista di $\mathbb{R}$ la cosa è abbastanza strana, dato che non si capisce come c'entri il numero 1 con la funzione $\frac{1}{1+x^2}$, che è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. la cosa si capirebbe se si ambientasse tutto nell'ambito dei numeri complessi. sarebbe alloraè chiaro che il raggio di convergenza non può essere più di 1 dato che i e $-i$, cha hanno modulo uno, sono delle singolarità per $\frac{1}{1+z^2}$.

4 Serie di Fourier

Consideriamo due successioni $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ di numeri reali e un numero $\omega > 0$.

4.1 Definizione. Chiamiamo *serie trigonometrica* la serie

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \tag{5}$$

In generale si chiama *polinomio trigonometrico* (di frequenza angolare ω) ogni somma finita del tipo

$$P(t) := \sum_{n=0}^{\bar{n}} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\bar{n}} b_n \sin(n\omega t)$$

Quindi la serie trigonometrica è il limite dei polinomi trigonometrici quando $\bar{n} \to +\infty$. Anche in questo caso il problema sarà di trovare quando la serie converge e quale regolarità ha la funzione f così definita.

Osserviamo che, se f esiste, essa è periodica ti periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4.2 Proposizione. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$ allora la serie trigonometrica converge assolutamente per ogni t reale e la sua somma $f(t)$ data da (5) è continua e T-periodica.*

Inoltre per ogni funzione continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ogni intervallo $[a, b]$ si ha

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = \sum_{n_0}^{\infty} a_n \int_a^b h(t)\cos(n\omega t) + \sum_{n_1}^{\infty} b_n \int_a^b h(t)\sin(n\omega t).$$

Se ne deduce

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt & se\ n \geq 1 \\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt & se\ n = 0 \end{cases}, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

Dimostrazione. Il fatto che la serie converga assolutamente segue immediatamente da

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\cos(n\omega t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n\sin(n\omega t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

essendo per ipotesi sommabili le due serie scritte a destra. Dinostriamo che preso un punto t_0 in $\mathbb{R}$ la funzione f definita da (5) è continua in t_0. Il ragionamento è analogo a quello usato nel caso delle serie di potenze. Sia $\varepsilon > 0$:

(1) possiamo trovare $\bar{n}$ tale che $\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{6}$ e $\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |b_n| < \frac{\varepsilon}{6}$;

(2) posto $g(t) := \sum_{n=0}^{\bar{n}} a_n\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\bar{n}} b_n\sin(n\omega t)$, essendo g continua si trova $\delta > 0$ tale che per ogni t con $|t - t_0| < \delta$ risulti $g(t) - g(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$;

(3) preso dunque un qualunque t con $|t - t_0| < \delta$ si ha

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - g(t_0)||g(t_0) - f(t_0)| \leq$$
$$\left|\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)\right| + \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} b_n\sin(n\omega t_0)\right| \leq \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n| + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |b_n| \leq \varepsilon.$$

Dimostriamo il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Dato k intero poniamo $f_k(t) := \sum_{n=0}^{k} a_n\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{k} b_n\sin(n\omega t)$. Allora:

$$\left|\int_a^b f(t)h(t)\,dt - \int_a^b f_k(t)h(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t) - f_k(t)|\,h(t)\,dt \leq \int_a^b h(t)\,dt \sum_{n=k+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Dato che la serie da $k + 1$ a infinito tende a zero per $k \to +\infty$ ricaviamo:

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = \lim_{k\to+\infty}\int_a^b f_k(t)h(t)\,dt =$$
$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k}\left(a_n\int_a^b h(t)\cos(n\omega t)\,dt + b_n\int_a^b h(t)\sin(n\omega t)\right) = \text{(per definizione di serie)}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\int_a^b h(t)\cos(n\omega t)\,dt + b_n\int_a^b h(t)\sin(n\omega t)\right).$$

Verifichiamo infine che valgono le formule indicate sopra per i coefficienti. Prendendo $h(t) = \sin(m\omega t)$ e integrando per serie

$$\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt.$$

Per il Lemma che segue tutti gli integrali sotto il segno di serie sono nulli tranne

$$\int_0^T \sin^2(m\omega t)\,dt = \frac{T}{2}.$$

Se ne deduce

$$\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\,dt = b_m\frac{T}{2} \Leftrightarrow b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\,dt.$$

Nello stesso modo si ricavano gli a_m con $m \geq 1$ (il termine a_0 fa lievemente eccezione perché per $n = 0$ l'integrale $\int_0^T \cos^2(n\omega t)\,dt$ fa T invece di $T/2$). $\square$

4.3 Lemma. *Valgono le formule seguenti per ogni $n, m \geq 1$:*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt =& 0\\
\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt =& \delta_{n,m}\frac{T}{2}, \quad \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \delta_{n,m}\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

dove $\delta_{n,m} = 0$ se $n \neq m$, mentre $\delta_{n,n} = 1$. Se $n = 0$ abbiamo invece

$$\int_0^T \sin(mt)\,dt = 0 \quad \forall m, \quad \int_0^T \cos(mt)\,dt = 0 \quad \forall m \geq 1, \quad \int_0^T \cos(0t)\,dt = T.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima. Integrando due volte per parti:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \underbrace{\left[\frac{\sin(n\omega t)\sin(m\omega t)}{m\omega}\right]_0^T}_{=0} - \frac{n}{m}\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt =\\
\frac{n}{m}\underbrace{\left[\frac{\cos(n\omega t)\cos(m\omega t)}{m\omega}\right]_0^T}_{=0} + \frac{n^2}{m^2}\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt =
\end{aligned}$$

Se $n \neq m$ se ne ricava:

$$\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0.$$

Se invece $n = m$ ci si può fermare dopo la prima integrazione per parti ottenendo

$$\left(1 + \frac{n}{n}\right)\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = 0.$$

e in entrambi i casi si ha la tesi. Le altre due formule si dimostrano in modo simile – vediamo solo il caso $n = m$ nella seconda. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin^2(n\omega t)\,dt = \int_0^T \sin(n\omega t)\sin(n\omega t)\,dt = \underbrace{\left[-\frac{\sin(n\omega t)\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^T}_{=0} + \int_0^T \cos^2(n\omega t)\,dt =\\
\int_0^T \left(1 - \sin^2(n\omega t)\right)\,dt = T - \int_0^T \sin^2(n\omega t)\,dt,
\end{aligned}$$

da cui si ricava la tesi. Le formule con $n = 0$ sono evidenti. $\square$

4.4 Proposizione. *Se* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n|a_n| < +\infty$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|b_n| < +\infty$ *allora la serie trigonometrica* f *data da* (5) *è derivabile con derivate continua e* T*-periodica e vale*

$$f'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n\omega a_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} n\omega b_n \cos(n\omega t)$$

dove la serie scritta a destra (anch'essa trigonometrica) converge assolutamente per ogni t*.*

Dimostrazione. Per ipotesi, applicando la Proposizione 4.2, la serie trigonometrica

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n\omega a_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} n\omega a_n \cos(n\omega t)$$

(ottenuta derivando termine a termine la f) converge per ogni t ed è una funzione continua di t. Possiamo inoltre integrare per serie tra 0 e un generico punto s ottenendo

$$\int_0^s g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \int_0^s n\omega \sin(n\omega t)\,dt + b_n \int_0^s n\omega \cos(n\omega t)\,dt \right) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left[\cos(n\omega t)\right]_0^s + b_n \left[\sin(n\omega t)\right]_0^s\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega s) + b_n \sin(n\omega s)\right) = f(s) - a_0 =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega s) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega s) - a_0 = f(s) - f(0).$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale f è derivabile e $f' = g$. □

Iterando si può ottenere il risultato seguente.

4.5 Proposizione. *Se* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k|a_n| < +\infty$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k|b_n| < +\infty$ *per un certo intero* k *allora la serie trigonometrica* f *data da* (5) *è derivabile* k *volte e le derivate* $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ *sono continue,* T*-periodiche e sono eguali alle serie delle rispettive derivate, le quali sono anch'esse serie trigonometriche assolutamente convergenti in ogni punto.*

4.6 Definizione. Se f è una funzione T-periodica su $\mathbb{R}$ e integrabile su $[0, T]$, chiamiamo *coefficienti di Fourier di* f i numeri

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\,dt & \text{se } n \geq 1 \\ \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)\,dt & \text{se } n = 0 \end{cases}, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\,dt.$$

e chiamiamo *serie di Fourier associata ad* f la serie trigonometrica costruita a partire da tali coefficienti.

Le proposizioni precedenti hanno messo in luce che una funzione periodica ottenuta come somma di una serie trigonometrica è somma della propria serie di Fourier, se i coefficienti verificano opportune ipotesi. Ci si può chiedere cosa succeda quando i coefficienti siano costruiti a partire da una f periodica assegnata. Vale il seguente teorema, che non dimostriamo.

4.7 Teorema. *Se* f *è una funzione* T*-periodica, se* t_0 *è un punto con le seguenti proprietà:*

- f *è derivabile in un intorno sinistro* $]t_0 - \delta, t_0[$ *e in un intorno destro* $]t_0, t_0 + \delta[$,
- f' *è continua e limitata sia in* $]t_0 - \delta, t_0[$ *che in* $]t_0, t_0 + \delta[$,

allora esistono finiti i limiti destro e sinistro in t_0

$$f(t_0^-) := \lim_{t\to t_0^-} f(t), \qquad f(t_0^+) := \lim_{t\to t_0^+} f(t)$$

e la serie di Fourier calcolata in t_0 converge alla media tra $f(t_0^-)$ e $f(t_0^+)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$$

4.8 Osservazione. Non è difficile vedere che

$$f \text{ pari } \Leftrightarrow b_n = 0\ \forall n, \qquad f \text{ dispari } \Leftrightarrow a_n = 0\ \forall n$$

4.9 Osservazione. Per la determinazione dei coefficienti di Fourier a_n e b_n, invece dell'integrale su $[0, T]$ si può usare l'integrale su un qualunque intervallo $[a, b]$ tale che $b-a = T$, per esempio $[T/2, T/2]$.

Dimostrazione. Consideriamo per esempio i b_n e supponiamo che $kT \le a < (k+1)T$; mediante la sostituzione $t = kT + s$

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \int_{a-kT}^{b-kT} f(s-kT)\sin(n\omega(s-kT))\,ds = \int_{a-kT}^{b-kT} f(s)\sin(n\omega(s))\,ds =$$

$$\int_{a-kT}^{T} f(s)\sin(n\omega(s))\,ds + \int_{T}^{b-kT} f(s)\sin(n\omega(s))\,ds = \quad \text{((sostituendo } s = T+u)$$

$$\int_{a-kT}^{T} f(s)\sin(n\omega(s))\,ds + \int_{0}^{b-T-kT} f(u)\sin(n\omega(u))\,du =$$

$$\int_{a-kT}^{T} f(s)\sin(n\omega(s))\,ds + \int_{0}^{a-kT} f(u)\sin(n\omega(u))\,du = \int_0^T f(s)\sin(n\omega(s))\,ds.$$

□

5 Alcuni esempi di sviluppi in serie di Fourier

5.1 Esempio (onda quadra)**.** Sia

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t \le \frac{T}{2} \\ 10 & \text{se } t = 0, \frac{T}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

ed estesa per periodicità (con periodo T) a tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier di f. Applicando le formule si ha:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} , dt = 0;$$

e per $k \ge 1$:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(\omega kt)\,dt - \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} \cos(\omega kt)\,dt = \left[\frac{2\sin(\omega kt)}{T\omega k}\right]_0^{T/2} - \left[\frac{2\sin(\omega kt)}{T\omega k}\right]_{T/2}^{T} = 0$$

(ricordando che $T\omega = 2\pi$, mentre

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega kt)\,dt - \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} \sin(\omega kt)\,dt = \left[-\frac{2\cos(\omega kt)}{T\omega k}\right]_0^{T/2} + \left[\frac{2\cos(\omega kt)}{T\omega k}\right]_{T/2}^{T} =$$

$$\frac{1}{\pi k}\left(-\cos(k\pi) + \cos(0) + \cos(2k\pi) - \cos(k\pi)\right) = \frac{2}{\pi k}(1-(-1)^k)$$

Si noti che essendo f dispari si sarebbe potito dire subito che $a_k = 0$ per gni k. Quindi per ogni t

$$f(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi k} \sin(\omega k t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega t)$$

Nella figura 1 sono riportato i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n. Si noti come l'approssimazione diventi *cattiva* vicino ai punti di salto anche per n grande.

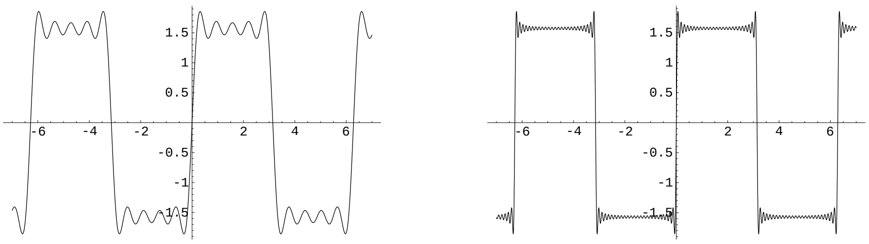

Figura 1: Onda quadra: polinomi di Fourier di ordine $n = 10$ e $n = 50$

5.2 Esempio (dente di sega)**.** Sia

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{se } t = \pm\frac{T}{2}, 0 \\ t - T & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

estesa per periodicità (con periodo T) a tutto $\mathbb{R}$. Anche questa funzione è dispari, quindi gli a_k sono tutti nullei. Per calcolare i b_k conviene usare l'intervallo $[-T/2, T/2]$ invece di $[0, T]$, notando che $f(t) = t$ in tale intervallo. Si ha allora (integrando per parti):

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t\sin(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\frac{-t\cos(k\omega t)}{\omega k}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T}\frac{1}{\omega k}\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega t)\,dt}_{=0} =$$

$$\frac{-\frac{T}{2}\cos(k\pi) - \frac{T}{2}\cos(-k\pi)}{\pi k} = -\frac{T}{k\pi}\cos(k\pi) = -(-1)^k\frac{T}{k\pi} = (-1)^{k+1}\frac{T}{k\pi}.$$

Quindi:

$$f(t) = -\frac{T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega t). \tag{6}$$

Nella figura 2 sono riportato i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n. Anche in questo caso l'approssimazione non è molto buona vicino al punto di salto. Si noti che, anche se si potrebbe pensae che la derivata del dente di sega sia la funzione 1 (eccetto che nei punti

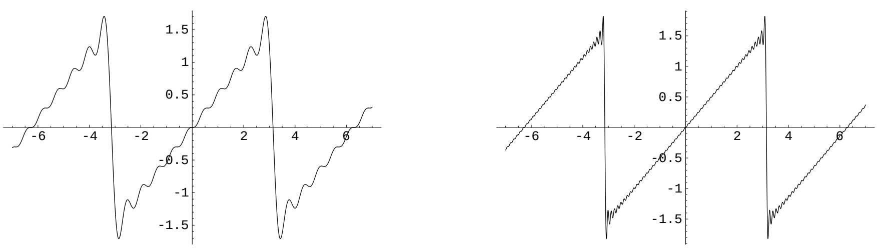

Figura 2: Dente di sega: polinomi di Fourier di ordine $n = 10$ e $n = 50$

$T/2 + kT$ in cui il dente di sega salta da $-T/2$ a $T/2$), non si può derivare sotto i segno di serie: si derivasse termine a termine la serie (6) si troverebbe la serie

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cos(k\omega t)$$

il cui termine generale non è nemmeno infinitesimo per nessun t (in qualche senso i punti di salto hanno effetto sulla derivata).

5.3 Esempio (onda triangolare)**.** Sia $f(t) := |t| - \dfrac{T}{4}$ se $-\dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2}$, estesa per periodicità (con periodo T) a tutto $\mathbb{R}$. Stavolta la funzione è pari per cui ci sono sol gli a_k. Si ha:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{T}{4}\right)\,dt = \frac{2}{T}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{Tt}{4}\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0;$$

e per $k \neq 0$ (integrando per parti):

$$\begin{aligned} a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(|t| - \frac{T}{4}\right)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{T}{4}\right)\cos(k\omega t)\,dt = \\ \underbrace{\frac{4}{T}\left[\frac{\left(t - \frac{T}{4}\right)\sin(k\omega t)}{\omega k}\right]_0^{T/2}}_{=0} - \frac{4}{\omega T k}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega t)\,dt = \\ \frac{2}{\pi k}\left[\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi\omega k^2}\left(\cos(k\pi) - \cos(0)\right) = \frac{2}{\pi\omega k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{T}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$f(t) = \frac{T}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(k\omega t) = -\frac{2T}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\omega t).$$

Nella figura 3 sono riportato i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n. Stavolta l'approssimazione è nettamente migliore (per ordini n anche più bassi dei precedenti). A cercare il pelo nell'uovo c'è qualche problema nell'approssimare gli spigoli, che sono sempre un po' tondi nelle approssimanti. Si può anche notare che la serie delle derivate è

$$-\frac{2T}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}[-(2k+1)\omega\sin((2k+1)\omega t)] = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin((2k+1)\omega t),$$

che è la serie di Fourier dell'onda quadra esaminata nel primo esempio. Non si può però applicare il risultato che abbiamo dimostrato sulla derivazione sotto il segno di serie dato che i coefficienti dell'onda quadra non danno luogo a una serie assolutamente convergente essendo dell'ordine di $\frac{1}{k}$ – questo concorda col fatto che l'onda quadra non è una funzione continua.

5.4 Esempio. Sia $f(t) = t^2$ per $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ (estesa per periodicità su tutto $\mathbb{R}$). Di nuovo f ha solo gli a_k essendo pari. i ha:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2\,dt = \frac{1}{T}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T^2}{12};$$

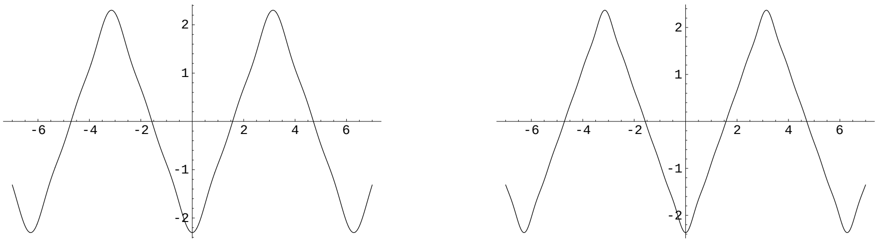

Figura 3: Onda triangolare: polinomi di Fourier di ordine $n = 5$ e $n = 10$

e per $k \geq 1$ (integrando due volte per parti):

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 \cos(k\omega t)\,dt = \underbrace{\frac{2}{T}\left[\frac{t^2 \sin(k\omega t)}{\omega k}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}}_{=0} - \frac{4}{\omega T k}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin(k\omega t)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi k}\left[\frac{t\cos(k\omega t)}{\omega k}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{\pi\omega k^2}\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(k\omega t)\,dt}_{=0} =$$

$$\frac{T}{\pi^2 k^2}\left(\frac{T}{2}\cos(k\pi) + \frac{T}{2}\cos(-k\pi)\right) = \frac{T^2}{\pi^2 k^2}(-1)^k = \frac{4}{\omega^2 k^2}(-1)^k.$$

Quindi

$$f(t) = \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\omega t)$$

Se $T = 2\pi$ e si prendono rispettivamente $t = 0$ e $t = \pi$ si trovano le formule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Riportiamo anche per questo esempio (vedi figure 4 i grafici di alcuni polinomi di Fourier approssimanti - la situazione è simile a quella dell'onda triangolare.

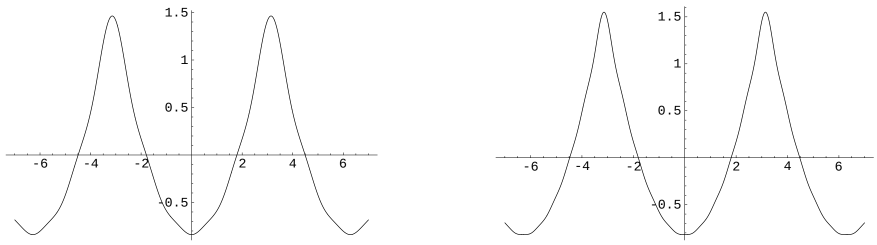

Figura 4: $f(t) = t^2 - \pi^2/3$: polinomi di Fourier di ordine $n = 5$ e $n = 10$