Complementi di Matematica
Ing.Energetica-Elettrica-Sicurezza
Versione A.A. 2007-08

Claudio Saccon

12 ottobre 2007

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Funzioni, successioni, limiti

In tutto quanto segue $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, cioè gli interi da zero in avanti, e $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi.

Ricordiamo che la scrittura $f : A \to B$ indica che f è una *funzione* definita sull'insieme A a valori nell'insieme B (f *va da/ manda* A in B). Per ogni a in A è definito univocamente un b in B: si scrive allora $f(a) = b$; si dice che a è la *variabile* che si mette ad *argomento* di f e che $b = f(a)$ è il *valore* che f assume in a.
Per esempio si può introdurre la funzione $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dicendo che $q(x) = x^2$. Notiamo che sarebbe stato lo stesso scrivere $q(a) = a^2$, l'importante è chiarire quale sia la regola che fa passare dall'argomento al valore, in questo caso l'elevazione al quadrato. Quindi nella definizione $q(x) = x^2$ la lettera x è una "variabile muta".
Da questa impostazione segue che la funzione si chiama f (q nell'esempio) mentre la scrittura $f(x)$ indica il valore che f assume in x (che deve essere noto quando lo si scrive). Nella pratica tale regola è spesso infranta e si scrive $f(x)$ per indicare la funzione (è più veloce dire "la funzione x^2" rispetto a "la funzione $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $q(x) = x^2$ per ogni x"), bisogna però essere consapevoli che si tratta di un piccolo abuso e tenere presente che parlando di una funzione si pensa al "complesso di tutti i suoi valori" (più precisamente alla regola che dato x "produce" $f(x)$. Questo sarà particolarmente vero nel seguito del corso in cui le funzioni saranno viste come oggetti singoli, su cui per esempio calcolare altre funzioni. Un modo utile di pensare a una funzione è attraverso il suo *grafico*, cioè all'insieme $\{(a, b) : a \in A, b \in B, b = f(a)\}$.

Si chiama *successione* una funzione che prende i suoi argomenti tra i nu-

meri interi. Quindi una successione in B (o anche una successione di punti di B) è una f con $f : \mathbb{N} \to B$ - o più in generale $f : \{n_0, n_0 + 1, \ldots\} \to B$. Tradizionalmente nel caso delle successioni si scrive f_n al posto di $f(n)$ e invece di f si scrive (f_n) (o $(f_n)_{n\geq n_0}$ quando serve indicare anche il punto iniziale in cui è definita la successione). Per esempio $(n^2)_{n\geq 0}$ è una successione, che differisce dalla funzione q di prima in quanto è definita solo per argomenti interi. Un altro esempio è $\left(\dfrac{1}{n-2}\right)_{n\geq 3}$ che è definita da 3 in poi.
Di solito le successioni si indicano con le prime lettere dell'alfabeto ((a_n), (b_n), (c_n),...) e spesso si assume implicitamente che n (o m) indichino delle variabili intere.

In tutta l'Analisi Matematica è fondamentale la nozione di **limite**. Rinviamo ai testi del primo anno la definizione di limite per funzioni reali di una variabile reale (che comprende anche quella per le successioni di numeri reali) e tutte le relative proprietà. che diamo quindi per note (ricorderemo invece, fra un momento, la definizione di limite in più variabili).
Ricordiamo solo che se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, x_0 è un punto di accumulazione per A (potendo anche essere $x_0 = \pm\infty$) e $f : A \to \mathbb{R}$, il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 (quando esiste) si scrive $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
Analogamente (ma non ci sarebbe necessità di dirlo) nel caso di una successione $(a_n)_{n\geq n_0}$ si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ($+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$). Per indicare che una funzione ammette un certo limite l per x tendente a x_0 (cioè che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$) scriveremo spesso

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_o} l \qquad (f(x) \to l, \text{ se } x_0 \text{ è chiaro dal contesto})$$

(dove l può essere finito o infinito). Nello stesso modo, nel caso delle successioni scriveremo

$$a_n \to l$$

(in questo caso n non può tendere che a $+\infty$). Quindi le scritture:

$$\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} +\infty, \qquad \frac{n}{n+1} \to 1, \qquad n \to +\infty,$$

sono sinonimi di

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Vediamo come si estende la nozione di limite al caso di più variabili.

1.1.1 Definizione. Dato N intero si indica con $\mathbb{R}^N$ l'insieme delle N-uple ordinate $(x_1, \dots, x_N)$. Si chiama *modulo* del punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, il numero $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots, x_N^2}$. Dati $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ chiameremo *distanza* tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ l'espressione

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots, (x_N - y_N)^2}.$$

Useremo (in questo paragrafo) la convenzione di scrivere i punti di $\mathbb{R}^N$ in grassetto e in carattere normale le coordinate.

1.1.2 Proposizione. *Vale la* disuguaglianza triangolare*:*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N.$$

1.1.3 Definizione. Se $(\mathbf{a}_n)$ è una successione di punti di $\mathbb{R}^N$ e se $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ diremo che $\mathbf{l}$ è il limite per n che tende all'infinito di $(\mathbf{a}_n)$, e scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l},$$

se

$$\lim_{n \to +\infty} |\mathbf{a}_n - \mathbf{l}| = 0.$$

Diremo anche, in questo caso, che tende a $\mathbf{l}$ e scriveremo spesso $\mathbf{a}_n \to \mathbf{l}$.

Per esempio $\mathbf{a}_n := \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{n}{n + 1} \right) \to (0, 1)$ (per $n \to +\infty$). Infatti

$$|\mathbf{a}_n - (0, 1)| = \sqrt{\frac{n^2}{(n^2 + 1)^2} + \frac{(-1)^2}{(n + 1)^2}} \to 0.$$

1.1.4 Definizione. Dato un insieme A contenuto in $\mathbb{R}^N$ e un punto $\mathbf{x}_0$ di $\mathbb{R}^N$ diremo che $\mathbf{x}_0$ è di *accumulazione* per A se esiste una successione $(\mathbf{x}_n)$ di punti di A che tende a $\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x}_n \in A$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$).

Per esempio il punto $(1, 0)$ è di accumulazione per il cerchio aperto di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1: $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$.

1.1.5 Definizione. Siano N ed M due interi maggiori o eguali a 1. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x}_0$ un punto di accumulazione per A e sia $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ ($\mathbf{f}$ è una funzione di N variabili reali a valori in $\mathbb{R}^M$). Dato $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$ diremo che $\mathbf{l}$ è il limite di $\mathbf{f}$ per $\mathbf{x}$ che tende a $\mathbf{x}_0$, e scriveremo

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l},$$

se per qualunque successione $(\mathbf{x}_n)$ di punti di A, tale che $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ succcede che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Diremo, anche in questo caso, che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tende a $\mathbf{l}$ e scriveremo spesso $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \stackrel{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\longrightarrow} \mathbf{l}$ ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}$ se $\mathbf{x}_0$ è chiaro dal contesto).

Per esempio $\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right) \to (0,1)$ se $(x,y) \to (1,1)$ (si può verificarlo con un po' di pazienza).

Se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ possiamo chiaramente scrivere $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_M(\mathbf{x}))$. In questo modo risultano definite $f_j : A \to \mathbb{R}$ per $j = 1, \ldots, M$, che si chiamano le *componenti* di $\mathbf{f}$.

1.1.6 Proposizione. *Se* $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$ *con* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_M)$, *allora*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{l} \iff f_j(\mathbf{x}) \to l_j \qquad j = 1, \ldots, M.$$

1.1.7 Definizione (continuità)**.** Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e sia $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$. Dato un punto $\mathbf{x}_0$ in A si dice che $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \stackrel{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\longrightarrow} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

nel caso in cui $\mathbf{x}_0$ sia punto di accumulazione per A. Nell'altro caso ($\mathbf{x}_0$ non è di accumulazione per A) la $\mathbf{f}$ si dice continua senza altre condizioni.

Si dice che $\mathbf{f}$ è continua su A se $\mathbf{f}$ è continua in ogni $\mathbf{x}_0$ di A.

Si può notare che con la definizione sopra una successione è automaticamente continua in tutti i suoi punti (nessun intero è di accumulazione per $\mathbb{N}$). Nella pratica però i casi interessanti sono quelli in cui i punti di A sono di accumulazione per A e quindi la continuità si esprime mediante il limite.

Non ripetiamo qui le proprietà dei limiti e della continuità in più variabili (accenneremo a qualcosa nel prossimo paragrafo) per le quali rinviamo a un testo opportuno.
Ricordiamo però il Teorema di Weierstrass per funzioni più variabili, con cui faremo dei confronti nel seguito. Premettiamo due definizioni.

1.1.8 Definizione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$.

- A si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.
- A si dice *limitato* se esiste una costante M per cui $|\mathbf{x}| \leq M$ per tutti i punti $\mathbf{x}$ di A.

1.1.9 Teorema (Weierstrass). *Se A è limitato e chiuso in $\mathbb{R}^N$ e se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ammette massimo e minimo su A, cioè esistono due punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ in A tali che*

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \qquad \forall \mathbf{x} \in A.$$

($\mathbf{x}_1$ si dice allora punto di minimo e $\mathbf{x}_2$ punto di massimo).

Concludiamo questo paragrafo col richiamare una importante proprietà di $\mathbb{R}^N$, (la *completezza*, come vedremo poi). Ricordiamo la definizione di successione di Cauchy.

1.1.10 Definizione. Sia $(\mathbf{a}_n)$ una successione in $\mathbb{R}^N$. Si dice che $(\mathbf{a}_n)$ *verifica la proprietà di Cauchy* - o più brevemente che $(\mathbf{a}_n)$ è di Cauchy - se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m| \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \bar{n}$$

(gli elementi di $(\mathbf{a}_n)$ "diventano arbitrariamente vicini tra loro al crescere dell'indice").

Non è difficile vedere che se $(\mathbf{a}_n)$ ammette limite allora essa verifica la proprietà di Cauchy. Anche il viceversa è vero, ma non è per nulla ovvio.

1.1.11 Teorema. *Sia $(\mathbf{a}_n)$ una successione in $\mathbb{R}^N$. Allora*

$$(\mathbf{a}_n) \text{ ammette limite} \Leftrightarrow (\mathbf{a}_n) \text{ è di Cauchy.}$$

Il teorema sopra riflette il fatto che $\mathbb{R}^N$ "non ha buchi": una successione di punti che si avvicinano tra loro non può sparire nel nulla. Questo non sarebbe vero se al posto di $\mathbb{R}$ ci fosse $\mathbb{Q}$. È facile infatti prendere una successione di numeri razionali che in $\mathbb{R}$ converge a $\sqrt{2}$ - tale successione è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ ma non converge a nulla in $\mathbb{Q}$.

1.2 Richiamo sulle serie numeriche

1.2.1 Definizione. Data una successione di numeri reali $(a_n)_{n \geq n_0}$ chiameremo *somma parziale* n-esima l'espressione

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

(che risulta definita per $n \geq n_0$). La (nuova) successione $(S_n)_{n \geq n_0}$ si chiama *serie* associata ad $(a_n)_{n \geq n_0}$ o più brevemente serie degli a_n.

Si dice che *la serie è convergente* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ ammette limite finito S, si dice che *la serie è divergente* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ tende a $\pm\infty$ e si dice che *la serie è indeterminata* se $(S_n)_{n\geq n_0}$ non ha limite. Nel primo caso chiamiamo il limite S *somma della serie* e lo indichiamo con

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Molto spesso, con un leggero abuso, l'espressione $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ viene usata per indicare la serie oltre che la sua somma, per cui si usa dire: *la serie* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *è convergente/divergente/indeterminata.*

Diremo che la serie è *assolutamente convergente* se la serie $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

Ricordiamo il comportamento di alcune serie importanti.

1.2.2 Proposizione. *La **serie geometrica** di ragione A:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

- *è convergente per $|A| < 1$ e in tal caso ha come somma* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} = \dfrac{1}{1-A}$*;*
- *è divergente positivamente per $A \geq 1$;*
- *è indeterminata per $A \leq -1$.*

1.2.3 Proposizione. *La serie armonica di esponente α*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- *è convergente se $\alpha > 1$;*
- *è divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.*

Ricordiamo i principali risultati sulle serie.

1.2.4 Proposizione. *Se* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge, allora $a_n \to 0$.*

1.2.5 Proposizione. *Se una serie* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *ha tutti termini positivi* ($a_n \geq 0$) *allora non può essere indeterminata.*

Il risultato sopra ci autorizza a considerare **sempre** la somma di una serie a termini positivi a patto di ammettere che possa essere $+\infty$. Potremo quindi scrivere $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$ per dire che la serie converge (visto che $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ha senso). Questa scrittura non si può usare se gli a_n cambiano segno.

È chiaro che per quanto sopra basterebbe $a_n \geq 0$ per n grande (da un certo $\bar{n}$ in poi).

1.2.6 Proposizione (criterio del confronto per serie a termini positivi)**.** *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni di numeri positivi.*

Se $a_n \leq b_n$ *per ogni* n *(per ogni* n *grande), allora*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{diverge}$$

1.2.7 Proposizione (criterio del confronto asintotico)**.** *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni di numeri positivi.*

Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Allora, se $l \in]0, +\infty[$*:*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge},$$

se $l = 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

mentre se $l = +\infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge}.$$

I due criteri che seguono sono scritti in termine del limite superiore e del limite inferiore di opportune esprssioni; in prima istanza si può pensare che esista il limite delle quantità indicate cioè che $\liminf = \limsup$.

1.2.8 Proposizione (criterio della radice). *Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Allora*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

1.2.9 Proposizione (criterio del rapporto). *Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Allora*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

1.2.10 Proposizione (criterio della convergenza assoluta). *Se una serie converge assoltamente essa converge. In altri termini, data una successione (a_n) si ha*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Notiamo che, essendo la successione dei valori assoluti una successione di numeri positivi, possiamo anche scrivere:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Il teorema seguente verrà utilizzato in seguito.

1.2.11 Teorema (prodotto alla Cauchy di due serie). *Siano $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie assolutamente convergenti. Poniamo per ogni n:*

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Allora $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ è assolutamente convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Dimostrazione. Poniamo innanzitutto:

$$s'_n := \sum_{i=1}^n a_i, \quad t'_n := \sum_{i=1}^n |a_i|, \quad s''_n := \sum_{i=1}^n b_i, \quad t''_n := \sum_{i=1}^n |b_i|, \qquad s_n := \sum_{i=1}^n c_i;$$

inoltre introduciamo

$$d_n := \sum_{k=1}^n |a_k||b_{n-k}|, \qquad t_n := \sum_{i=1}^n d_i$$

Sappiamo che $s'_n \to s'$ e $s''_n \to s''$ in $\mathbb{C}$ per opportuni s' ed s'' in $\mathbb{C}$, mentre $t'_n \to t'$ e $t''_n \to t''$ per due numeri reali positivi t' e t''.

Facciamo la dimostrazione per passi.

1. Mostriamo che $\sum_n d_n < +\infty$ (notiamo che $d_n \in \mathbb{R}$ e $d_n \geq 0$). Si ha:

   $$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i+j \leq n} |a_i||b_j| \leq \sum_{i,j \leq n} |a_i||b_j| = t'_n t''_n \leq t't''$$

   Ne segue che $\sum_n d_n < +\infty$.

2. Dato che

   $$|c_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k||b_{n-k}| = d_n$$

   per il criterio del confronto otteniamo che $\sum_n |c_n| < +\infty$, cioè $\sum_n c_n$ è assolutamente convergente (dunque convergente). Quindi esiste un s in $\mathbb{C}$ tale che $s_n \to s$.

3. Mostriamo che $s = s's''$. Si ha

   $$|s'_n s''_n - s_n| = \left| \sum_{i,j \leq n} a_i b_j - \sum_{i+j \leq n} a_i b_j \right| = \left| \sum_{i,j \leq n, i+j > n} a_i b_j \right| \leq$$

   $$\sum_{i,j \leq n, i+j > n} |a_i||b_j| \leq \sum_{n < i+j \leq 2n} |a_i||b_j| = t_{2n} - t_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} d_k - t_n$$

   Dato che $t_n \to \sum_k d_k$ si ha che $|s'_n s''_n - s_n| \to 0$ e dunque $s = s's''$.

□

1.3 Numeri complessi

Ricordiamo che i numeri complessi sono espressioni del tipo $x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro tenendo presente che $(i)^2 = -1$. Si ha cioè:

$$\begin{aligned}(x' + iy') + (x'' + iy'') &= (x' + x'') + i(y' + y''),\\ (x' + iy')(x'' + iy'') &= x'x'' + i(x'y'' + x''y') + (i)^2 y'y'' = \\ &\quad x'x'' - y'y'' + i(x'y'' + x''y').\end{aligned}$$

L'insieme dei numeri complessi verrà indicato con $\mathbb{C}$. Se $z = x + iy$ si scrive

$$x = \Re e(z) \text{ (\textit{parte reale} di } z), \qquad y = \Im m(z) \text{ (\textit{parte immaginaria} di } z),$$

(si noti che la parte immaginaria è un numero reale); si definisce il *coniugato* di z, indicato con $\bar{z}$, ponendo $\bar{z} := x - iy$. In questo modo

$$\Re e(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \Im m(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Sempre se $z = x + iy$ si definisce il *modulo* di z, indicato con $|z|$, ponendo $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Si vede facilmente che

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Si verifica facilmente che:

$$\overline{z' + z''} = \overline{z'} + \overline{z''}, \quad \overline{z'z''} = \overline{z'}\ \overline{z''}, \quad |z'z''| = |z'||z''|.$$

Come è ben noto si può stabilire una corrispondenza tra i numeri complessi e il piano cartesiano (cioè tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$) identificando $x + iy$ con (x, y). Questa identificazione permette di visualizzare l'operazione di somma tra numeri complessi mediante l'usuale somma di punti (o meglio di vettori) fatta con la regola del parallelogramma. Per capire come funziona il prodotto introduciamo la *forma polare* di un numero complesso. Se $z = x + iy$ allora $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ appartiene alla circonferenza unitaria e quindi esiste unico un angolo θ in $[0, 2\pi[$ tale che

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Diremo che tale θ è l'*argomento principale* di z - in generale diremo che θ in $\mathbb{R}$ è un argomento di z se verifica la formula sopra e cioè se differisce dall'argomento principale per un multiplo intero relativo di 2π. Scriveremo in ogni caso, con un po' di ambiguità, $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ (a rigore $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$).

Allora se $z', z'' \in \mathbb{C}$, e se $z = z'z''$ si ha

$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z') + \mathrm{Arg}(z'').$$

(ciò significa che θ è un argomento di z se e solo se $\theta = \theta' + \theta''$ per θ' argomento di z' e θ'' argomento di z'').
In sostanza, mentre il modulo del prodotto è la somma dei moduli, l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti. Queste due proprietà giustificano la definizione di esponenziale complesso.

1.3.1 Definizione. Se $z = x + iy$ si definisce

$$e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Si vede facilmente che l'esponenziale complesso coincide con quello tradizionale quando $z \in \mathbb{R}$ (cioè se $y = 0$) e che

$$e^{z'+z''} = e^{z'}e^{z''} \qquad \forall z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Con l'introduzione dell'esponenziale complesso si può scrivere

$$z = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \rho = |z|, \theta = \mathrm{Arg}(z).$$

Si può anche notare che $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ e che

$$\cos(\theta) = \Re e(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \Im m(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(formule che useremo spesso nel seguito).

Osserviamo infine che la corrispondenza tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ permette di definire le nozioni di limite e di continuità per funzioni definite su $\mathbb{C}$ o a valori in $\mathbb{C}$. Si verifica facilmente che vale il fatto seguente.

1.3.2 Proposizione. *Se $\rho_n \to \rho$ e $\theta_n \to \theta$ allora $\rho_n e^{i\theta_n} \to \rho e^{i\theta}$.*

1.3.3 Esempio. Dato z in $\mathbb{C}$ definiamo la successione (z_n) in $\mathbb{C}$ ponendo

$$z_n := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Dimostriamo che $z_n \to e^z$. Scriviamo $z = x + iy$ Allora

$$|z_n|^2 = z_n\overline{z_n} = \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x-iy}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^n =$$
$$e^{n\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)} = e^{n\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}+o\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right)} =$$
$$e^{n\left(\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2x+o(1)} \to e^{2x}.$$

(si è sfruttata la formula di Taylor $\ln(1+t) = t + o(t)$). Quindi passando alla radice

$$|z_n| \to e^x.$$

Cerchiamo un argomento θ_n per z_n; osserviamo che l'argomento principale di $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{z}{n} + i\frac{y}{n}$ è pari a $\arctan\left(\frac{y/n}{1+x/n}\right)$ e quindi, passando alla potenza n-esima, possiamo prendere

$$\theta_n = n \arctan\left(\frac{y/n}{1+x/n}\right) = n\left(\frac{y/n}{1+x/n} + o\left(\frac{y/n}{1+x/n}\right)\right) = \frac{y}{1+x/n} + o(1) \to y$$

(perché $\arctan(t) = t + o(t)$). In definitiva:

$$z_n = |z_n| e_n^{\theta} \to e^x e^{iy} = e^z.$$

Capitolo 2

Successioni e serie di funzioni

2.1 Convergenza puntuale e uniforme

Supponiamo che A sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ e supponiamo che per ogni intero n sia data una funzione $f_n : A \to \mathbb{R}^M$. Diremo in questo caso che (f_n) è una successione di funzioni da A in $\mathbb{R}^M$. In quanto segue, per visualizzare le definizioni, si consiglia di pensare inizialmente al caso $N = M = 1$.

2.1.1 Definizione. Diciamo che la successione (f_n) *converge puntualmente* in un punto x_0 di A se esiste il limite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Diciamo che (f_n) *converge puntualmente su* A se (f_n) converge puntualmente in ogni x_0 di A. È chiaro che in quest'ultimo caso siamo autorizzati a considerare la funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ definita da

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

e potremo quindi dire che (f_n) converge puntualmente a f (in forma abbreviata scriveremo $f_n \to f$ puntualmente o anche $f_n \xrightarrow{punct} f$).

2.1.2 Definizione. Data la successione di funzioni (f_n) e una funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ diciamo che f_n converge *uniformemente su* A a f se si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Se introduciamo la *norma uniforme* di una funzione f (sull'insieme A) mediante

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,A} := \sup_{x\in A} |f(x)|$$

allora la convergenza uniforme si può esprimere dicendo che f_n converge uniformente a f se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

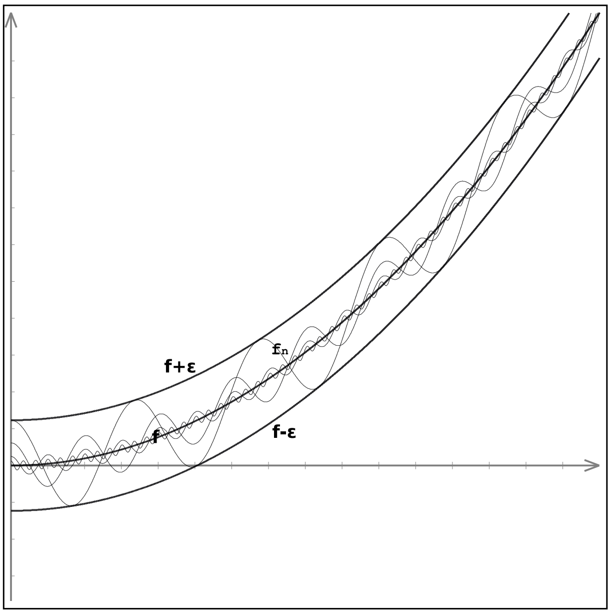

Figura 2.1: convergenza uniforme

Per indicare che f_n converge uniformemente a f, useremo la notazione $f_n \to f$ uniformemente (su A), o anche $f_n \xrightarrow{unif} f$ (su A).

Notiamo che l'espressione introdotta sopra, che abbiamo chiamato norma, non è necessariamente finita (può essere $+\infty$). Essa è finita se e solo se f è limitata su A, per esempio se A è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^N$ e f è continua. Vedremo le motivazione del termine "norma" nei prossimi paragrafi.
È comunque vero in ogni caso che se $f_n \xrightarrow{unif} f$ $\|f_n - f\|$ **deve** essere finito e tendere a zero.

2.1.3 Osservazione. Un modo di visalizzare la convergenza uniforme é di dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, il grafico delle f_n é *definitivamente* compreso tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$ (vedi figura 2.1).

La seguente proprietà è una semplice conseguenza delle definizioni.

2.1.4 Proposizione. *Se f_n converge uniformemente a f su A, allora f_n connverge puntualmente su A.*

La proposizione precedente dice che se f_n converge uniformemente a qualcosa, questo qualcosa deve essere il limite puntuale delle f_n: il limite puntuale **individua** il candidato limite uniforme.
La proposizione non è invertibile come mostrano i vari esempi che seguono.

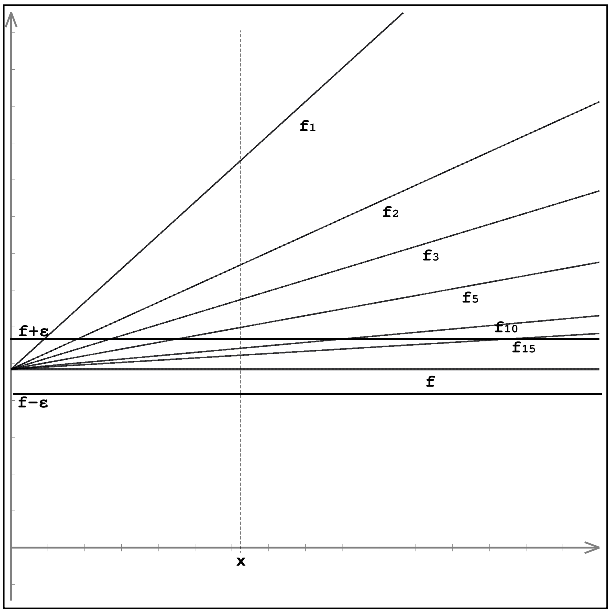

Figura 2.2: $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$

2.1.5 Esempio. Consideriamo $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$. Si vede subito che, dato x in $\mathbb{R}$, $f_n(x) \to 1$ e dunque f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione f che vale costantemente 1. Si vede abbastanza facilmente però che f_n non converge uniformemente su $\mathbb{R}$ a f. Si vede infatti che non c'é nessun intero n per cui il grafico di f_n é *tutto* tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$ dato che ogni retta di equazione $y = 1 + \dfrac{x}{n}$ va all'infinito e quindi supera $1 + \varepsilon$ per x abbastanza grande (vedi figura 2.2). In particolare $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$ e dunque non é possibile che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
In sostanza, anche se a x fissato $f_n(x) \to 1$, la *velocitá di convergenza* dipende da x (e peggiora tanto piú x é grande) e non é quindi *uniforme* rispetto a x.

Notiamo che se invece di prendere le f_n su tutto $\mathbb{R}$ consideriamo $A; = [0, 1]$ (o un qualunque interallo limitato), allora $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} 1$ su A. Infatti

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{0 \le x \le 1} |1 + x/n - 1| = \max_{0 \le x \le 1} x/n = \frac{1}{n} \to 0$$

Dunque le f_n non convergono uniformemente a 1 su $\mathbb{R}$ ma convergono uniformemente a 1 su ogni intervallo $[a, b]$.

2.1.6 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := e^{-nx}$ definite su $A := [0, +\infty[$ (vedi

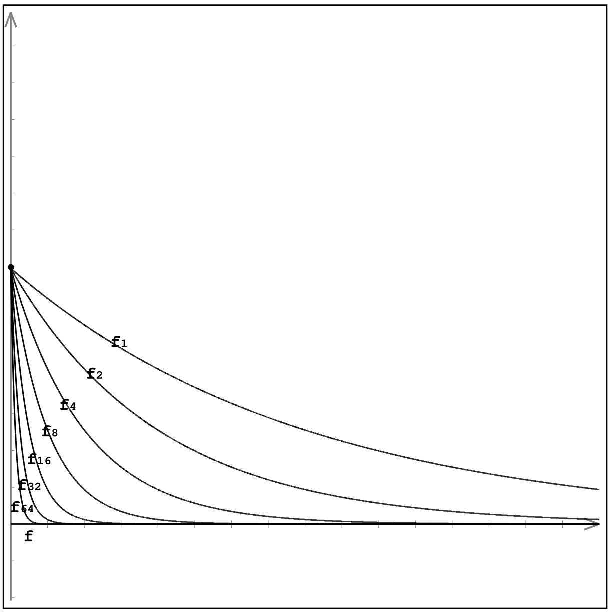

Figura 2.3: $f_n(x) = e^{-nx}$

la figura 2.3).

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

cioè f_n converge puntualmente alla funzione f che vale zero su $]0, +\infty[$ e vale uno in zero. Però f_n non converge uniformente a f in quanto, *per ogni* n

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\geq 0} |e^{-nx} - f(x)| = \sup_{x>0} |e^{-nx}| = 1$$

che non tende a zero. Notiamo che le f_n sono tutte funzioni continue mentre il loro limite puntuale f non è continua in 0 dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)(=0) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1(=1)$$

2.1.7 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := ne^{-nx}$ definite su $A :=]0, +\infty[$ (vedi la figura 2.4). Anche in questo caso $f_n(x) \to 0$ per ogni $x > 0$ (anche se c'è un n a moltiplicare l'esponeziale e^{-nx} "vince"); notiamo che non abbiamo messo lo zero in A (altrimenti $f_n(0) \to +\infty$). Quindi le f_n tendono puntualmente a zero su A. Anche stavolta la convergenza non è uniforme, si vede infatti che, per ogni n

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x>0} |ne^{-nx}| = n$$

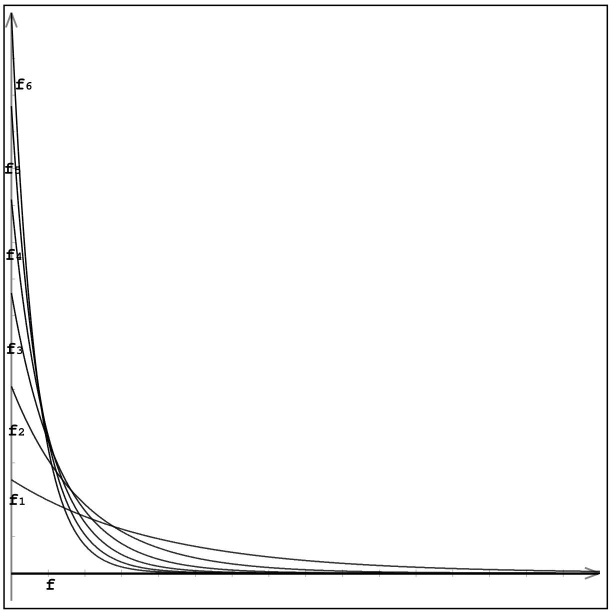

Figura 2.4: $f_n(x) = ne^{-nx}$

che addirittura tende all'infinito. Notiamo che

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} ne^{-nx}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1$$

e quindi l'integrale delle f_n non tende all'integrale della funzione limite (che sarebbe zero).

Si potrebbe ritenere che questo dipenda dal fatto che A è un intervallo aperto, oppure che A non è limitato. In realtà, con un po' di pazienza, si può costruire un esempio analogo su $[0,1]$; prendiamo infatti $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g_n(x) := \begin{cases} ne^{-nx} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ \frac{n^2}{e}x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

(vedi la figura 2.5). Come prima, per x fissato, $g_n(x) \to 0$. Infatti se $x = 0$ $g_n(0) = 0 \to 0$, mentre se $x > 0$ per n grande $g_n(x) = f_n(x) \to 0$. D'altra parte

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} ne^{-1}x\,dx + \int_{1/n}^1 ne^{-nx}\,dx =$$

$$\left[ne^{-1}\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/n} + \left[n\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_{1/n}^1 = \frac{e^{-1}}{2n} - e^{-n} + e^{-1} \to e^{-1} \neq 0$$

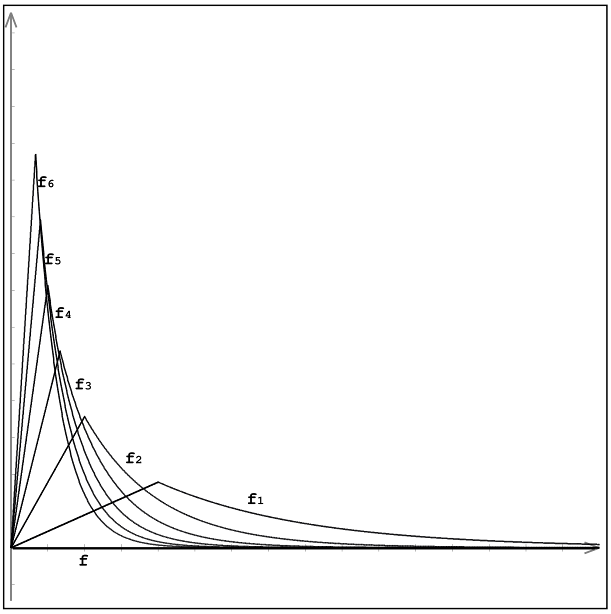

Figura 2.5: $g_n(x)$

e quindi di nuovo l'integrale delle g_n non tende all'integrale del limite puntuale (che sarebbe zero).

Questi esempi mostrano che la convergenza puntuale *non va d'accordo* coi limiti e con gli integrali. Mostriamo ora che, al contrario, la convergenza uniforme si comporta bene.

2.1.8 Teorema. *Siano $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, $f : A \to \mathbb{R}^M$ e supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in A. Sia x_0 un punto di accumulazione per A e supponiamo che per ogni n esista $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ che indichiamo con l_n. Allora*

1. *esiste $l = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$;*
2. *si ha che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$*

In sostanza si può dire che

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che gli l_n hanno limite. Per questo mostreremo che la successione (l_n) verifica la proprietà di Cauchy. Fissiamo n e m; dato che, per ogni x di A

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

facendo tendere x a x_0 si ottiene:

$$|l_n - l_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty .$$

Siccome $f_n \xrightarrow{unif} f$, cioè $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, é chiaro che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che, se $n, m \geq \bar{n}$, si ha $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Dalla disuguaglianza sopra segue allora che (l_n) é di Cauchy.
Dunque possiamo trovare un l in $\mathbb{R}^M$ tale che $l_n \to l$.

Mostriamo ora che $f(x) \to l$ per $x \to x_0$. Per questo prendiamo una successione (x_k) in A, con $x_k \to x_0$ e mostriamo che $f(x_k) \to l$ per $k \to \infty$. Dato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\bar{n}$ tale che per tutti gli $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{e} \qquad |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Fissiamo ora un $n_0 \geq \bar{n}$ (per esempio lo stesso $\bar{n}$); dato che $f_{n_0}(x_k) \to l_{n_0}$, possiamo trovare $\bar{k}$ tale che

$$|f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq \bar{k}.$$

Prendiamo allora $k \geq \bar{k}$; si ha:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - l| \leq |f(x_k) - f_{n_0}(x_k)| + |f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| \leq \\ \|f - f_{n_0}\| + |f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Essendo ε arbitrario abbiamo dimostrato che $f(x_k) \to l$, cioè la tesi. $\square$

Come conseguenza ricaviamo subito il seguente risultato

2.1.9 Teorema. *Siano (f_n) ed f tali che $f_n \xrightarrow{unif} f$ su A e sia $x_0 \in A$. Se tutte le f_n sono continue in x_0, allora f è continua in x_0. Se ne ricava che se le f_n sono continue su A, anche la f è continua su A.*

Dimostrazione. Basta notare che per ogni n $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ e applicare il teorema precedente con $l_n = f_n(x_0)$. $\square$

2.1.10 Teorema. *Siano (f_n) ed f tali che $f_n \xrightarrow{unif} f$ su A, supponiamo che le f_n e la f siano integrabili su A e che la misura (o volume) di A (che indichiamo con $|A|$) sia finita. Allora*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx$$

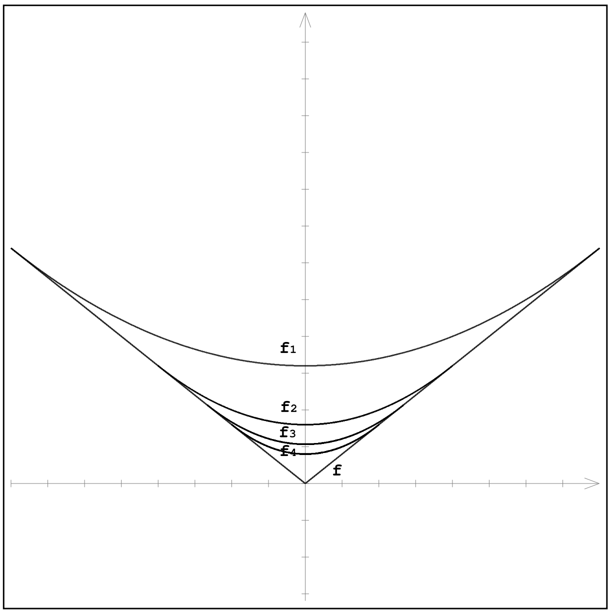

Figura 2.6: approssimazioni derivabili di $|x|$

Dimostrazione. Si ha:

$$\left|\int_A f_n(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx\right| = \left|\int_A (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq$$
$$\int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_A \|f_n - f\|_\infty\,dx = |A|\,\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

□

2.1.11 Esempio. Contrariamente all'integrazione l'operazione di derivata *non va d'accordo* con la convergenza uniforme. Per esempio se consideriamo le funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definite da:

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2}x^2 + \dfrac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(vedi la figura 2.6) si vede che f_n è derivabile e che

$$f_n'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \\ n & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{se } x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

Non è difficile verificare che $f_n \xrightarrow{unif} f$, dove $f(x) = |x|$ ed è chiaro che f non è derivabile in zero. Quindi è possibile che funzioni derivabili convergano ad una non derivabile. Vale però il seguente risultato.

2.1.12 Teorema. *Supponiamo che I sia un intervallo in $\mathbb{R}$ e che $f_n : I \to \mathbb{R}$ sia una successione di funzioni derivabili su I con derivata f_n' continua su I. Supponiamo che ci siano due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ per cui:*

$$f_n \to f \quad \textit{puntualmente} \qquad f_n' \to g \quad \textit{uniformemente}$$

(ne segue che g è continua). Allora f è derivabile e $f' = g$.

Dimostrazione. Siano x_0 e x due punti in I. Allora per il teorema del calcolo integrale:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$$

Se facciamo tendere n all'infinito $f_n(x_0) \to f(x_0)$ e $f_n(x) \to f(x)$, per la convergenza puntuale di f_n a f. D'altra parte per la convergenza uniforme delle f_n' a g e per il teorema (2.1.10) si ha che:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \to \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

e quindi l'eguaglianza sopra passa al limite:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \forall x \text{ in } I$$

Di nuovo per il teorema fondamentale del calcolo questo implica $f' = g$. $\square$

2.2 Spazi vettoriali, convergenza e completezza

2.2.1 Definizione. Un insieme $\mathbb{X}$ si dice uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (rispettivamente su $\mathbb{C}$) se per ogni x_1 e x_2 in $\mathbb{X}$ risulta definita in $\mathbb{X}$ la *somma* x_1+x_2 dei due *vettori* x_1 e x_2, per ogni x in $\mathbb{X}$ e ogni c in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) risulta definito cx in $\mathbb{X}$, detto *prodotto* del vettore x per lo *scalare* c, di modo che le due operazioni così introdotte verificano le usuali proprietà: [1]

2.2.2 Definizione. Dati $x_1,\dots,x_n$ in $\mathbb{X}$ si chiamia *combinazione lineare* di $x_1,\dots,x_n$ un'espressione del tipo $c_1x_1+\cdots+c_Nx_n$ dove i *coefficienti* $c_1,\dots,c_N$ sono in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Si dice che $x_1,\dots,x_n$ sono *linearmente dipendenti* se esiste una combinazione lineare nulla fatta con dei coefficienti non identicamente nulli (cioè se $\exists(c_1,\dots,c_n)\neq(0,\dots,0)$ tali che $c_1x_1+\cdots+c_Nx_n=0$). Si dice che $x_1,\dots,x_n$ sono *linearmente indipendenti* se ciò non è vero, cioè se ogni combinazione lineare nulla deve avere tutti i coefficienti eguali a zero. Si dice che $x_1,\dots,x_n$ è una base per $\mathbb{X}$ se $x_1,\dots,x_n$ sono linermente indipendenti e *generano* $\mathbb{X}$; con quest'ultima espressione intendiamo che ogni x di $\mathbb{X}$ si può scrivere come combinazione lineare di $x_1,\dots,x_n$, in altri termini $x=c_1x_1+\cdots+c_Nx_N$ per opportuni $c_1,\dots,c_N$.

2.2.3 Osservazione. È semplice verificare che se esiste un base per $\mathbb{X}$ fatta di N vettori, allora

- se $M>N$ presi comunque $x_1,\dots,x_M$ in $\mathbb{X}$, essi sono linearmente dipendenti;
- per ogni x in $\mathbb{X}$ c'è un'*unica* combinazione lineare dei vettori della base che genera x.

2.2.4 Definizione. Diciamo che $\mathbb{X}$ ha dimensione N se esiste una base per $\mathbb{X}$ fatta di N vettori. Diciamo che $\mathbb{X}$ ha dimensione infinita se ciò non è vero

[1] tali proprietà sono

la commutativa: per ogni x_1 e x_2 in $\mathbb{X}$ $x_1+x_2=x_2+x_1$;

l'associativa: per ogni x_1, x_2 e x_3 in $\mathbb{X}$ $(x_1+x_2)+x_3=x_1+(x_2+x_3)$;

l'esistenza dell'elemento neutro: esiste $\mathbf{0}$ tale che per ogni x in $\mathbb{X}$ $x+\mathbf{0}=x$;

l'esistenza dell'opposto: per ogni x in $\mathbb{X}$ esiste $-x$ in $\mathbb{X}$ per cui $x+(-x)=\mathbf{0}$;

la distributiva: per ogni c in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) e ogni x_1, x_2 in $\mathbb{X}$ $c(x_1+x_2)=cx_1+cx_2$;

la neutralità di 1: per ogni x in $\mathbb{X}$ $1x=x$

per nessun N, cioè se non è possile trovare una base formata da un numero finito di vettori di $\mathbb{X}$.

L'esempio tipico di spazio vettoriale di dimensione N è lo spazio $\mathbb{R}^N$, che può essere assunto come "prototipo"di tutti. Si vede facilmente che $\mathbb{R}^N$ è uno spazio vettoriale di dimensione N e che una sua base si ottiene per esempio prendendo i *versori* $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_N$ definiti da $\hat{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0)$, $\hat{e}_2 := (0, 1, \ldots, 0)$,..., $e_N := (0, 0, \ldots, 1)$. In questo modo il vettore $x = (x_1, \ldots, x_N)$ si rappresenta univocamente come $x = x_1\hat{e}_1 + \cdots + x_N\hat{e}_N$.

Vediamo ora che si possono considerare spazi vettoriali i cui elementi sono delle funzioni. Dato A sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M) &:= \left\{ f : A \to \mathbb{R}^M \right\}, \\ \mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M) &:= \left\{ f : A \to \mathbb{R}^M : \ |f| \text{ è limitata su } A \right\}, \\ \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^M) &:= \left\{ f : A \to \mathbb{R}^M : \ f \text{ è continua su } A \right\} \end{aligned}$$

Nel caso in cui $M = 1$, scriviamo più semplicemente $\mathcal{F}(A)$, $\mathcal{B}(A)$ e $\mathcal{C}^0(A)$. Chiaramente $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M) \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$; se poi A è limitato e chiuso allora, per il teorema di Weierstrass, $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^M) \subset \mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M)$.
È evidente che si tratta di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, dato che, se $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}^M$ è ben definita $f_1 + f_2$ ponendo $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$ per ogni x in A e analogamente se $f : A \to \mathbb{R}^M$, $c \in \mathbb{R}$ è ben definita cf ponendo $(cf)(x) := cf(x)$. Inoltre è chiaro che la combinazione lineare di funzioni limitate (risp. continue) è una funzione limitata (risp. continua). Notiamo che in tutti questi spazi l'elemento zero è la funzione identicamente nulla, cioè $\mathbf{0}(x) = 0$ per ogni x in A.
Analogamente si potrebbero definire degli analoghi spazi di funzioni a valori in $\mathbb{C}^M$, che risultano evidentemente spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.
Gli spazi di funzione sopra introdotti hanno tutti **dimensione infinita**.

2.2.5 Esempio. Mostriamo un esempio che $\mathcal{C}^0([0, 1])$ ha dimensione infinita. Per questo facciamo vedere che preso comunque n intero si possono trovare n elementi di $C^0([0, 1])$ che sono linearmente indipendenti. A questo scopo dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n sottointervalli $I_1, \ldots, I_n$ ponendo $I_k := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, per $k = 1, \ldots, n$ e consideriamo delle funzioni continue $f_1, \ldots, f_k$ tali che $f_k(x) = 0$ se $x \notin I_k$, mentre $f_k(x_k) = 1$, dove x_k è il punto medio di I_k ($x_k = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n}$). Un esempio di funzioni del genere è rappresentato nelle figura 2.7.
Se ora $c_1, \ldots, c_n$ sono dei coefficienti reali tali che $c_1 f_1 + \cdots c_N f_N = \mathbf{0}$ allora $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$ per ogni x in $[0, 1]$. Scegliendo $x = x_1$ si trova $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_N \cdot 0 = 0$, da cui $c_1 = 0$. Analogamente prendendo $x = x_k$

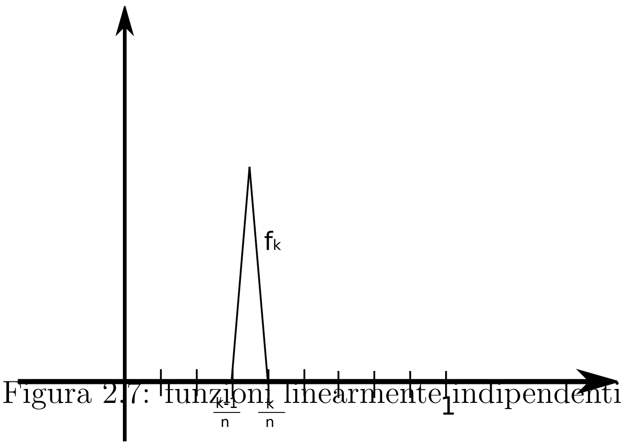

Figura 2.7: funzioni linearmente indipendenti in $\mathcal{C}^0$

si deduce $c_k = 0$ per ogni $k = 1, \dots, N$ e dunque $f_1, \dots, f_N$ sono linearmente indipendenti.

2.2.6 Definizione. Sia dato uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Chiameremo *norma* (o modulo) in $\mathbb{X}$ una applicazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{R}$ con le proprietà seguenti: se indichiamo con $\|x\|$ la norma del vettore x, allora deve essere

1. $\|x\| \geq 0$ per ogni x e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2. $\|cx\| = |c|\|x\|$ per ogni vettore x e ogni scalare c;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni coppia di vettori x e y.

Se in $\mathbb{X}$ è definita una norma si dice che $\mathbb{X}$ è una *spazio normato.* A volte, quando sia necessario distinguere tra norme in spazi diversi, indicheremo la norma di un vettore x di $\mathbb{X}$ con $\|x\|_{\mathbb{X}}$.
Notiamo che la seconda proprietà implica $\| - x\| = \|x\|$.

Per il resto del capitolo supponiamo che $\mathbb{X}$ sia uno spazio normato, dotato di una norma $\|\cdot\|$. Possiamo allora considerare in $\mathbb{X}$ la nozione di limite Come vedremo, una volta introdotta una norma, le definizioni sono le stesse che si usano in $\mathbb{R}^N$. Per semplicità c i limiteremo ai limiti di successioni, ma si potrebbe fare lo stesso per i limiti di funzioni.

2.2.7 Definizione. Data una successione (a_n) di punti di $\mathbb{X}$ e dato l in $\mathbb{X}$ diremo che l è il limite di (a_n) per n che tende all'infinito (o anche che (a_n) tende ad l) se

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - l\| = 0$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

o anche in modo più conciso , $a_n \to a$ ($n \to +\infty$ viene sottinteso).

2.2.8 Proposizione. *La definizione di limite introdotta sopra verifica le usuali proprietà del limite di successioni di numeri reali. Valgono ad esempio i fatti seguenti che non è difficile dedurre dalla definizione.*

1. *Il limite, se esiste, è unico:* $a_n \to l_1, a_n \to l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$.

2. *Se* (a_n) *ha limite allora* (a_n) *è limitata, cioè* $\exists M : \|a_n\| \le M \ \forall n$.

3. *Se* $a_n \to a$, $b_n \to b$ *in* $\mathbb{X}$ *e se* $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ *in* $\mathbb{R}$ *(risp. in* $\mathbb{C}$*) allora* $\alpha_n a_n + \beta_n b_n \to \alpha a + \beta b$.

Le proprietà che non si possono trasferire al caso generale sono quelle che dipendono dal $\geq$ *(la relazione d'ordine è un concetto essenzialmente unidimensionale). Per esempio i limiti infiniti si fanno solo per le successioni a valori reali.*

2.2.9 Esempio. In $\mathbb{R}^N$ il modulo che abbiamo ricordato nel primo paragrafo: $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$, dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, verifica come si vede facilmente le proprietà di una norma. Continueremo a usare la notazione con una barra sola per la modulo (o norma) dei punti di $\mathbb{R}^N$ (imitando il simbolo del *valore assoluto*, che corrisponde alla norma quando $N = 1$) per riservare le due barre a norme in spazi più generali.
La norma appena introdotta non è però l'unica possibile in $\mathbb{R}^N$. Potremmo ad esempio considerare

$$|\mathbf{x}|_1 := |x_1| + \cdots + |x_N|$$

Vediamo che $|\cdot|_1$ è una norma.

1. È evidente che $|\mathbf{x}|_1 \geq 0$. Inoltre $|\mathbf{x}|_1 = 0$ significa $|x_1| + \cdots + |x_N| = 0$ che è possibile se e solo se $|x_1| = \cdots = |x_N| = 0$, cioè se $\mathbf{x} = 0$.

2. $|c\mathbf{x}|_1 = |cx_1| + \cdots + |cx_N| = |c|(|x_1| + \cdots + |x_N|) = |c||\mathbf{x}|_1$.

3. $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_N + y_N| \leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_N| + |y_N| = |\mathbf{x}|_1 + |\mathbf{y}|_1$

Dunque anche $|\cdot|_1$ è una norma. Un'altra possibilità è:

$$|\mathbf{x}|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$$

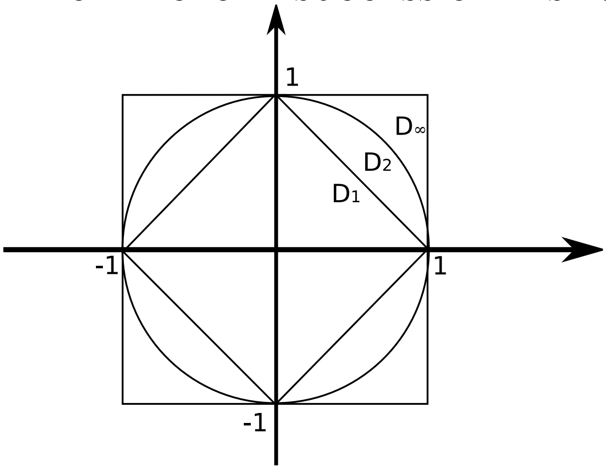

Figura 2.8: Le palle unitarie rispetto a norme diverse

(la notazione con ∞ sarà chiara in seguito). Non è difficile verificare che anche $|\cdot|_\infty$ è una norma.
Notiamo che le tre norme ora introdotte verificano la seguente relazione:

$$|\mathbf{x}|_\infty \le |\mathbf{x}| \le |\mathbf{x}|_1 \le N|\mathbf{x}|_\infty \tag{2.1}$$

come è facile verificare. Ne segue che le *palle* di centro $\mathbf{0}$ e raggio r nelle rispettive norme:

$$D_\infty(r) := \{\mathbf{x} \colon |\mathbf{x}|_\infty \le r\}\,, \quad D(r) := \{\mathbf{x} \colon |\mathbf{x}| \le r\}\,, \quad D_{(}r) := \{\mathbf{x} \colon |\mathbf{x}|_1 \le r\}$$

verificano le seguenti inclusioni (vedi la figura 2.8):

$$D_1(r) \subset D(r) \subset D_\infty(r) \subset D_1(Nr)$$

La relazione (2.1) implica che la nozione di limite introdotta a partire da una qualunque delle tre norme considerate sopra *è la stessa*. Ciò vuol dire che data una successione $(\mathbf{a}_n)$ di punti di $\mathbb{R}^N$ e un punto $\mathbf{a}$ di $\mathbb{R}^N$ si ha

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| \to 0 \Leftrightarrow |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_1 \to 0 \Leftrightarrow |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_\infty \to 0$$

Per esempio il fatto che $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_1 \to 0$ implichi $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_\infty \to 0$ è conseguenza della diseguaglianza $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_\infty \le |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_1$ e le altre implicazioni seguono in modo analogo.

L'esempio sopra suggerisce la seguente definizione.

2.2.10 Definizione. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno stesso spazio vettoriale $\mathbb{X}$ si dicono *equivalenti* se esitono due costanti $0 < M_1 \leq M_2$ tali che

$$M_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M_2\|x\|_1 \qquad \forall x \in \mathbb{X} \tag{2.2}$$

È facile vedere (come fatto sopra) che due norme equivalenti producono la *stessa nozione di limite*.

Si potrebbe dimostrare (con strumenti assai avanzati) il seguente risultato.

2.2.11 Teorema. *Se $\mathbb{X}$ ha dimensione finita* ***tutte*** *le norme sono tra loro equivalenti. Quindi negli spazi vettoriali di dimensione finita c'è un' unica possibile nozione di limite (proveniente da una norma).*

Come fatto in $\mathbb{R}^N$ possiamo introdurre la proprietà di Cauchy per successioni in uno spazio vettoriale normato.

2.2.12 Definizione. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale normato e sia $\|\cdot\|$ la norma. Si dice che una successione (a_n) di punti di $\mathbb{X}$ verifica la proprietà di Cauchy (brevemente (a_n) è di Cauchy) se:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\bar{n} \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } \forall n, m \geq \bar{n} \quad \|a_n - a_m\| \leq \varepsilon.$$

È di nuovo assai facile vedere che se (a_n) ammette limite allora è di Cauchy. A differenza di $\mathbb{R}^N$ il viceversa può non essere vero se si considerano spazi di dimensione infinita. Questo fatto motiva la seguente definizione.

2.2.13 Definizione. Uno spazio vettoriale normato $\mathbb{X}$ di dice *completo* se ogni successione di Cauchy ammette limite.

Con la definizione precedente il teorema 1.1.11 si può enuciare dicendo:

"Gli spazi $\mathbb{R}^N$ sono completi"

Vediamo che in effetti tale proprietà può non essere vera per uno spazio normato arbitrario.

2.2.14 Esempio. Consideriamo $\mathbb{X} = C^0([-1, 1])$ e per ogni f in $\mathbb{X}$ definiamo

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$$

Mostriamo che $\|\cdot\|_1$ è una norma.

1. Evidentemente $\|f\|_1 \geq 0$ per ogni f in $\mathbb{X}$; se poi $\|f\|_1 = 0$ si ha $\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt = 0$ ed essendo $|f| \geq 0$ l'unico modo di rendere nullo l'integrale è di avere $|f(t)| = 0$ per ogni t in $[-1,1]$, cioè di avere $f = 0$.

2. Se c è uno scalare si ha
$$\|cf\|_1 = \int_{-1}^{1} |cf(t)|\,dt = |c| \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt = |c|\|f\|_1$$

3. Date f e g in $\mathbb{X}$
$$\|f+g\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)+g(t)|\,dt \leq \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt + \int_{-1}^{1} |g(t)|\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Con tale norma abbiamo introdotto una nozione di convergenza tra le funzioni continue: data una successione (f_n) di funzioni continue su $[-1,1]$ e una f continua su $[-1,1]$, (f_n) tenderà a f (nel senso della norma $\|\cdot\|_1$) se
$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f(t)|\,dt \to 0$$
(cioè se l'area tra il grafico di f_n e quello di f tende a zero). Questa nozione di limite è accettabile ma ha un grave difetto: Lo spazio $\mathbb{X}$ **non è completo** rispetto a questa norma. Per vedere ciò prendiamo la seguente successione:
$$f_n(t) := \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{se } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
(vedi la fugura 2.2.14).

Dico che (f_n) è di Cauchy, infatti presi due interi $n \geq m$ si ha
$$\|f_n - f_m\| = \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \leq \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} 1\,dt = \frac{2}{m}$$
e dunque per n, m grandi tale espressione può essere resa arbitrariamente piccola. Se mostriamo che (f_n) non ammette limite abbiamo trovato che $\mathbb{X}$ non è completo. Per questo consideriamo prima la funzione g definita da
$$g(t) := \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

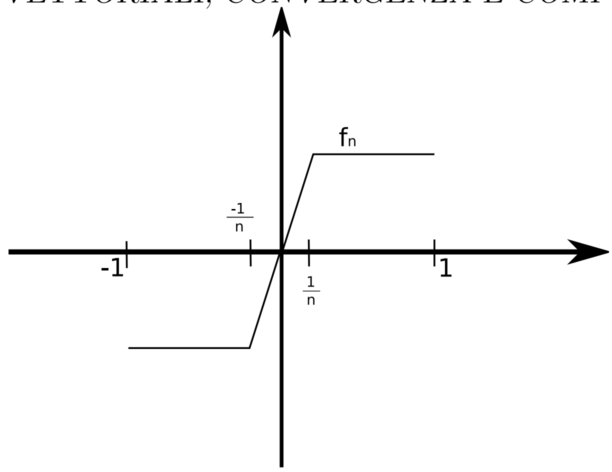

Figura 2.9:

e notiamo che

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - g(t)|\, dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1\, dt = \frac{2}{n} \to 0$$

ma g **non è** una funzione continua. A questo punto supponiamo per assurdo che esista una f in $\mathbb{X}$ tale che $f_n \to f$. Ne seguirebbe:

$$\int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\, dt \leq \int_{-1}^{1} |f(t) - f_n(t)|\, dt + \int_{-1}^{1} |f_n(t) - g(t)|\, dt \to 0$$

da cui $\int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\, dt = 0$. Ma ciò implicherebbe $f(t) = g(t)$ e questo è assurdo perché f deve essere continua mentre g non lo è.

La completezza dello spazio gioca un ruolo importante nei problemi di convergenza di una serie. Analogamente a quanto fatto nel caso dei numeri reali si possono infatti considerare le serie di elementi di uno spazio vettoriale generico.

2.2.15 Definizione. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale normato sia $\|\cdot\|$ la sua norma.
Data una successione $(a_n)_{n\geq n_0}$ di punti di $\mathbb{X}$ chiamiamo *somma parziale* n-esima l'espressione

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

(che risulta definita per $n \geq n_0$). La successione $(S_n)_{n \geq n_0}$ si chiama *serie* associata ad $(a_n)_{n \geq n_0}$ o più brevemente serie degli a_n.
Si dice che *la serie è convergente* se $(S_n)_{n \geq n_0}$ ammette limite S in $\mathbb{X}$. In tal caso diciamo che S è la *somma della serie* e lo indichiamo con

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Molto spesso, con un leggero abuso, l'espressione $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ viene usata per indicare la serie oltre che la sua somma, per cui si usa dire: *la serie* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *è/ non è convergente.*

Diremo che la serie è *assolutamente convergente* se la serie $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \|a_n\|$ è convergente.

Notiamo che nel caso delle serie a valori vettoriali non ha senso dire che la serie è divergente.

2.2.16 Teorema (convergenza e convergenza assoluta)**.** *Se $\mathbb{X}$ è completo ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Poniamo, per n intero:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n := \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|$$

Allora presi due interi qualunque $n \geq m$ si ha:

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{m} a_k \right\| \leq$$
$$\sum_{k=m+1}^{m} \|a_k\| = \sum_{k=1}^{m} \|a_k\| - \sum_{k=1}^{m} \|a_k\| = |T_n - T_m|$$

Se ne deduce facilmente che se (T_n) è di Cauchy (in $\mathbb{R}$), allora (S_n) è di Cauchy (in $\mathbb{X}$). Infatti dato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n}$ tale che

$$|T_n - T_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \bar{n};$$

allora

$$\|S_n - S_m\| \leq |T_n - T_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \bar{n}.$$

Possiamo allora concludere la dimostrazione osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \text{ converge in } \mathbb{R} \Rightarrow (T_n) \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R} \ \Rightarrow$$

$$(S_n) \text{ è di Cauchy in } \mathbb{X} \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge in } \mathbb{X}$$

dove l'ultima implicazione discende dalla completezza di $\mathbb{X}$. □

Ricordiamo che in generale non è detto che una serie convergente sia assoluamente convergente (cioè che valga il viceversa del teorema precedente); ciò si può vedere già tra le serie di numeri reali considerando la serie (a segni alterni) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge ma non converge assolutamente.
Il criterio della convergenza assoluta è comunque assai utile (se funziona) in quanto permette di ricondursi a studiare la convergenza di una serie di numeri positivi.

2.3 Spazi di funzioni con la norma uniforme

Ricordiamo che abbiamo indicato con $\mathcal{B}(A)$ le funzioni limitate su A e con $\mathcal{C}^0(A)$ le funzioni continue su A (a valori reali) e che, se A è compatto (cioè A è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^N$), allora $\mathcal{C}^0(A) \subset \mathcal{B}(A)$ (per il teorema di Weierstrass). È anche chiaro che per f in $\mathcal{B}(A)$ la norma uniforme di f è finita.

2.3.1 Proposizione. *La norma uniforme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,A}$, introdotta in 2.1.2, è una norma su $\mathcal{B}(A)$ (e quindi su $\mathcal{C}^0(A)$). Di conseguenza dire che una successione (f_n) in $\mathcal{B}(A)$ converge a f in $\mathcal{B}(A)$ significa che f_n sono funzioni limitate che convergono uniformente a una funzione limitata f.*
Inoltre, se A è compatto, $\mathcal{C}^0(A)$ è (un sottospazio) chiuso in $\mathcal{B}(A)$.

Dimostrazione. Il fatto che $\|\cdot\|_\infty$ verifichi le proprietà della norma è una semplice conseguenza delle definizioni. Il fatto che $\mathcal{C}^0(A)$ sia chiuso significa che se (f_n) è una successione di funzioni continue che converge uniformemente a una f, allora f deve essere continua. Questo è esattamente il contenuto del teorema 2.1.9 □

L'aver introdotto la struttura di spazio normato sulle funzioni limitate/continue permette di inquadrare varie proprietà della convergenza uniforme e di fare altre considerazioni in base alla teoria svolta nel caso astratto, come vedremo meglio nel prossimo paragrafo.

La norma uniforme è la “norma giusta”in $\mathcal{B}(A)$. Vale il seguente risultato (importantissimo).

2.3.2 Teorema. *Lo spazio $\mathcal{B}(A)$ dotato della norma uniforme è completo. Se A è compatto, allora lo spazio $\mathcal{C}^0(A)$ è completo.*

Dimostrazione. Vediamo al dimostrazione per $\mathcal{B}(A)$ (per $\mathcal{C}^0(A)$ si ragiona in modo analogo). Sia (f_n) una successione di Cauchy in $\mathcal{C}^0(A)$. Fissiamo un qualunque x in A; dato che:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_\cdot\|_\infty \tag{2.3}$$

si vede subito che $(f_n(x))$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque ammette limite per la completezza di $\mathbb{R}$. Possiamo indicare con $f(x)$ il limite di $(f_n(x))$. Abbiamo quindi trovato una funzione f a cui (f_n) converge puntualmente: cerchiamo di far vedere che $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$.
Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$. Allora preso un qualunque x in A e $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$

che a causa di (2.3) implica

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ed essendo x arbitrario

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Abbiamo in questo modo verificato la definizione di $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$. □

2.3.3 Osservazione. Tutto quanto fatto fino ad ora si può ripetere per funzioni a valori in $\mathbb{R}^M$ o anche in $\mathbb{C}^M$.

2.4 Serie di funzioni

Come abbiamo considerato le successioni di funzioni possiamo considerare le serie. Per questo basterebbe applicare la definizione generale di serie a valori in spazi vettoriali - ripetiamo però tale definizione nel caso in cui gli elementi da sommare siano delle funzioni.

2.4.1 Definizione. Supponiamo che $f_n : A \to \mathbb{R}$ formino una successione di funzioni. Per ogni intero n chiamiamo somma parziale n-esima relativa a (f_n) la funzione $F_n : A \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_n(x)$$

Chiamiamo *serie* di funzioni associata a (f_n) la successione delle somme parziali (F_n). Diciamo che la serie delle f_n è uniformemente convergente su A se esiste una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ a cui le F_n convergono uniformemente: $F_n \xrightarrow{unif} F$. In questo caso chiamiamo F *somma* della serie e la indichiamo con

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \qquad \left(\text{e quindi } F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in A\right).$$

Molto spesso si indica con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ la serie (cioè la successione) oltre che la sua somma. Quindi su usa dire, con un leggero abuso, che la "serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$"è (o non è) uniformemente convergente.
Rimarchiamo anche in questo caso che se la serie converge uniformemente ($F_n \xrightarrow{unif} F$), allora essa converge puntualmente ($F_n \xrightarrow{punct} F$), cioè per ogni x di A la serie numerica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è convergente. Si può dire in questo caso che la serie converge puntualmente.

Se le f_n sono funzioni limitate allora la convergenza uniforme della serie di funzioni $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ non è altro che la conbvergenza della serie nello spazio normato $\mathcal{B}(A)$. Dato che tale spazio è completo, utilizzando il teorema 2.2.16 si deduce il seguente risultato.

2.4.2 Teorema. *Sia (f_n) una successione di funzioni limitate su A. Se la serie numerica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x)|$ è convergente, allora la serie delle f_n converge uniformemente su A ad una funzione limitata.*

2.4.3 Osservazione. La proprietà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| < +\infty$$

(cioè la convergenza assoluta rispetto alla norma uniforme) viene anche chiamata *convergenza totale* della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Il teorema precedente afferma quindi che una serie di funzioni limitate che sia totalmente convergente è uniformemente convergente.

Se poi le f_n sono continue su un insieme compatto, anche la somma della serie è continua e valgono altre conseguenza del tipo di quelle già viste nel paragrago 2.1.

2.4.4 Corollario. *Sia (f_n) una successione di funzioni in $\mathcal{C}^0(A)$, con A compatto e supponiamo che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in A} |f_n(x)|$ sia convergente. Allora*

1. *$F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è una funzione continua.*
2. *Si ha*
$$\int_A F(x)\,dx = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$
3. *Se $A = I$ è un intervallo, se le f_n sono tutte derivabili con derivata continua e se anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in A} |f_n'(x)|$ è convergente allora F è derivabile e si ha*
$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \text{ in } I.$$

Dimostrazione. Per il teorema (2.4.2) la successione delle somme parziali (F_n) converge uniformemente a F e dunque il limite F è una funzione continua (dal teorema (2.1.8)). Inoltre, per il teorema (2.1.10)

$$\int_A F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A F_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) dx =$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$

(l'ultima eguaglianza è solo la definizione della convergenza della serie degli integrali).

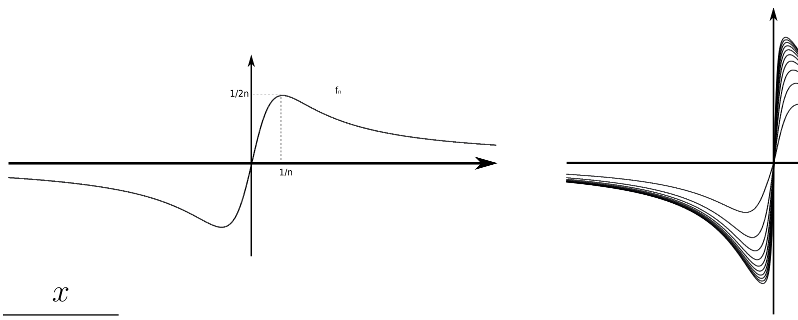

Figura 2.10: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^2x^2}$

Infine l'ipotesi di convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_\infty$ implica, sempre per il teorema (2.4.2), che la serie delle f_n' è uniformemente convergente. Questo significa che le sue somme parziali $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k'$ convergono uniformemente ad una funzione continua G. Dato che $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k' = F_n'$ abbiamo che $F_n' \xrightarrow{unif} G$. Per il teorema (2.1.12), ciò implica che F è derivabile e $F' = G$, cioè vale l'ultima affermazione. $\square$

2.4.5 Esempio. Consideriamo la seguente successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da

$$f_n(x) := \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0, \qquad f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Quindi il grafico di ogni f_n è quello rappresentato in figura 2.10. In particolare f_n raggiunge il suo massimo in $x = \frac{1}{n}$ e il massimo di f_n vale $f_n(1/n) = 1/2n$. Dunque

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}.$$

e quindi $f_n \xrightarrow{unif} 0$ (su tutto $\mathbb{R}$). Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Studiamone la convergenza puntuale: fissato x in $\mathbb{R}$ vediamo se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

è convergente. Questo è vero per ogni x dato che, se $x = 0$ la serie ha tutti i suoi termini nulli, mentre se $x \neq 0$

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2|x|}$$

e quindi la serie converge (dato che la serie $\frac{1}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge). Dunque ha senso scrivere

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

(x per x). Notiamo che $F(0) = 0$. Ci possiamo chiedere se F sia continua su tutto $\mathbb{R}$. Ciò sarebbe sicuramente vero se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} < +\infty$; sfortunatamente tale serie diverge essendo eguale a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ e quindi con questo ragionamento non si perviene a nulla.
Se però fissiamo un qualunque $a > 0$ e consideriamo $A := [a, +\infty[$, si ha

$$\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) \qquad \text{se } n \geq 1/a.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} = \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty,A} + \sum_{n > 1/a} f_n(a) =$$
$$\sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty,A} + \sum_{n > 1/a} \frac{a}{1+n^2a^2} \leq \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty,A} + \frac{1}{a} \sum_{n > 1/a} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Applicando il corollario 2.4.4 (in A) otteniamo che la serie converge uniformemente su A e la sua somma F risulta continua su A. Dato che il numero $a > 0$ è arbitrario ne deduciamo che f è continua su $]0, +\infty[$. Analogamente si dimostra che F è continua su $] -\infty, 0[$.

In maniera analoga possiamo dimostrare che F è derivabile su A e quindi è derivabile in ogni $x \neq 0$. Infatti consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n', \qquad \text{dove } f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Si ha

$$\|f_n'\|_{\infty,A} = \sup_{x\geq a}\left|\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\right| \leq \sup_{x\geq a}\frac{1+n^2x^2}{n^4x^4} \leq \frac{1}{n^4a^4}+\frac{1}{n^2a^2}.$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4a^4}+\frac{1}{n^2a^2} < +\infty$ la serie delle derivate è uniformemente convergente su A e quindi tale serie è la derivata di F.

Vediamo che invece F non è continua in zero. Infatti se $0 < x < 1$ si ha [2]

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]}\frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]}\frac{x}{1+1} = \frac{1}{2}x\,[1/x] \xrightarrow{x\to 0^+} \frac{1}{2}.$$

Questa disuguaglianza rende impossibile che $F(x) \to 0 = F(0)$ per $x \to 0^+$ e quindi F non è continua in zero (almeno da destra - si può anche ripetere lo stesso ragionamento per $x \to 0^-$).

La figura 2.10 rappresenta la somma parziale di ordine 10 delle f_n.

2.5 Applicazioni lineari continue

2.5.1 Definizione. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali normati e indichiamo le loro norme con $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ rispettivamente. Siano A un sottoinsieme di $\mathbb{X}_1$ e x_0 un punto di A e sia F una funzione (o applicazione) da A in $\mathbb{X}_2$, (in breve $f : A \to \mathbb{X}_2$).
Diremo che F è continua in x_0 se per ogni successione (a_n) di punti di A tale che $a_n \to x_0$ (in $\mathbb{X}_1$) succede che $F(a_n) \to F(x_0)$ (in $\mathbb{X}_2$). Diremo che F è continua in A se F è continua in tutti i punti di A.

È facile vedere che valgono le seguenti proprietà (standard).

2.5.2 Proposizione. *1. Se F è continua in x_0 allora F è limitata in un intorno di x_0, cioè esistono un raggio $r > 0$ ed un numero M tali che*

$$\|F(x)\|_2 \leq M \qquad \forall x \in A : \|x - x_0\|_1 \leq r$$

2. Se F e G sono continue in x_0 e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (risp. $\in \mathbb{C}$), allora $\alpha F+\beta G$ è continua in x_0.

3. Se $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ e $\mathbb{X}_3$ sono spazi normati, se $A \subset X_1$, $x_0 \in A$, $B \subset \mathbb{X}_2$, $F : A \to B$, F è continua in x_0, $G : B \to \mathbb{X}_3$, G è continua in $y_0 := F(x_0)$ allora la funzione composta $G \cdot F$ è continua in x_0.

[2] ricordiamo che $[t]$ indica la parte intera di un numero t, definita da $[t] := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$; ne segue allora che $[t]$ è un intero e che $[t] \leq t < [t] + 1$

Un particolare interesse rivestiranno per noi le applicazioni lineari continue.

2.5.3 Definizione. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali. Se L è una applicazione da X_1 in $\mathbb{X}_2$ si dice che L è *lineare* quando

$$L(c_2x_1+c_2x_2) = c_1L(x_1)+c_2L(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}_1, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\text{risp. in } \mathbb{C})$$

Spesso per le applicazioni lineari si sopprimono le parentesi scrivendo Lx in luogo di $L(x)$.

2.5.4 Proposizione. *Se $L : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ è lineare sono equivalenti i tre fatti seguenti.*

1. *L è continua in ogni x_0 di $\mathbb{X}_1$;*
2. *L è continua in $\mathbf{0}$;*
3. *esiste una costante M tale che*

$$\|L(x)\|_2 \leq M\|x\|_1 \qquad \forall x \in \mathbb{X}_1 \tag{2.4}$$

dove $\|\cdot\|_1$ (risp. $\|\cdot\|_2$) indica la norma in $\mathbb{X}_1$ (risp. in $\mathbb{X}_2$).

Dimostrazione. È chiaro che (1) $\Rightarrow$ (2). Mostriamo che (2) $\Rightarrow$ (1). Sia x_0 un qualunque punto di $\mathbb{X}_1$. Per la linearità e la continuità in zero:

$$x_n \to x_0 \Leftrightarrow (x_n - x_0) \to \mathbf{0} \Rightarrow L(x_n - x_0) \to \mathbf{0} \Leftrightarrow L(x_n) \to L(x_0)$$

(dato che $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) e quindi L è continua in x_0.
Mostriamo che (2) $\Rightarrow$ (3). Per le proprietà dei limiti è chiaro che se L è continua in zero allora essa è limitata in una palla centrata in zero, cioè esistono M_1 ed $r > 0$ tali che

$$\|L(y)\|_2 \leq M_1 \qquad \forall y \in \mathbb{X}_1 \text{ tale che } \|y\|_1 \leq r.$$

Ma allora se $x \in \mathbb{X}_1$ e $x \neq 0$ posto $y := \dfrac{x}{\|x\|}r$ si ha $\|y\| = r$ e dunque $L(y) \leq M_1$. Per la linearità di L

$$\|L(x)\|_2 = \frac{\|x\|_1}{r}\|L(y)\|_2 \leq \frac{\|x\|_1}{r}M_1$$

e quindi, ponendo $M := \dfrac{M_1}{r}$ abbiamo ottenuto (2.4).
Se viceversa vale (2.4) è evidente che L è continua in zero, cioè vale (2). $\square$

2.5.5 Definizione. Se L è lineare e continua chiamiamo *norma di L* il numero

$$\|L\| := \inf\{M: \text{ vale la disuguaglianza (2.4)}\}$$

Quindi (come si può vedere facilmente)

$$\|L(x)\|_2 \leq \|L\|\|x\|_1 \qquad \forall x \in \mathbb{X}_1$$

e $\|L\|$ è il più piccolo M per cui vale tale disuguaglianza. Si può anche vedere che

$$\|L\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Lx\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Lx\|_2$$

Vediamo che la norma sopra introdotta per le applicazioni lineari ha effettivamente le proprietà introdotte in 2.2.6.

1. Chiaramente$\|L\| \geq 0$, se poi $\|L\| = 0$ si ha $\|Lx\|_2 \leq 0\|x\|_1$ per ogni x, cioè $Lx = 0$ per ogni x e dunque $L = 0$.

2. Sia c uno scalare. Allora $\|(cL)(x)\|_2 = |c|\|L(x)\|_2 \leq |c|\|L\|\|x\|_1$ per cui $M = |c|\|L\|$ verifica $\|(cL)(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$. Dato che $\|cL\|$ è la più piccola costante con questa proprietà si ha $\|cL\| \leq |c|\|L\|$. Se $c = 0$ abbiamo finito; se $c \neq 0$, per lo stesso motivo $\|L\| = \|c^{-1}cL\| \leq |c^{-1}|\|cL\|$ e quindi, moltiplicando per $|c|$, troviamo $|c|\|L\| \leq \|cL\|$. Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha $\|cL\| = |c|\|L\|$.

3. Siano L_1 e L_2 due applicazioni lineari continue. Per ogni x si ha

$$\|(L_1 + L_2)(x)\|_2 = \|L_1(x) + L_2(x)\|_2 \leq \|L_1(x)\|_2 + \|L_2(x)\|_2 \leq \\ \|L_1\|_2\|x\|_1 + \|L_2\|_2\|x\|_1 = (\|L_1\| + \|L_2\|)\|x\|_1$$

   Quindi $M = \|L_1\| + \|L_2\|$ verifica $\|(L_1 + L_2)(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$. Dato che $\|L_1 + L_2\|$ è la più piccola costante con questa proprietà si ha $\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$.

Abbiamo quindi verificato che lo spazio vettoriale

$$\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) := \{L : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2 : L \text{ è lineare e continua}\}$$

è uno spazio normato (quindi si può introdurre una nozione di convergenza di applicazioni lineari a una applicazione lineare).
Se poi $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}$, e quindi prese due applicazioni lineari L_1, L_2 da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$ ha senso considerare la composizione L_1L_2, si ha:

$$\|L_1L_2\| \leq \|L_1\|\|L_2\|.$$

Infatti per ogni x si ha $\|L_1L_2x\| \leq \|L_1\|\|L_2x\| \leq \|L_1\|\|L_2\|\|x\|$. Quindi $M = \|L_1\|\|L_2\|$ verifica $\|L_1L_2x\| \leq M\|x\|$. Dato che $\|L_1L_2\|$ è la più piccola costante con questa proprietà si ha $\|L_1L_2\| \leq \|L_1\|\|L_2\|$.

2.5.6 Esempio. Consideriamo una applicazione lineare da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$. Indichiamo con $\hat{e}_j$ i versori di $\mathbb{R}^N$ $(j = 1, \dots, N)$; allora il vettore $L\hat{e}_j$ avrà M componenti che indichiamo con $a_{1,j}, \dots, a_{M,j}$. In questo modo risulta definita una matrice $M \times N$ $\mathbf{A}$ di elementi $a_{i,j}$ per $i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, N$. Usando la linearità di L si vede facilmente che

$$L(x_1, \dots, x_N) = (y_1, \dots, y_M) \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}x_j \quad \text{per } i = 1, \dots, M$$

Questo significa che L si rappresenta mediante il prodotto matriciale della matrice $\mathbf{A}$ per in vettore $\mathbf{x}$ (convenendo di rappresentare i vettori come colonne, cioè come matrici $N \times 1$ (in partenza e $M \times 1$ in arrivo).
Poniamo $\bar{A} := \max\{|a_{i,j}| : i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N\}$. Si vede allora che

$$|L(\mathbf{x})| \leq |L(\mathbf{x})|_1 = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}|_1 = \sum_{i=1}^{M} \left| \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}x_j \right| \leq M\bar{A}|\mathbf{x}|_1 \leq NM\bar{A}|\mathbf{x}|$$

(abbiamo usato ripetutamente (2.1)). Ne segue che L è continua e che $\|L\| \leq NM\bar{A}$. Se identifichiamo le matrici $M \times N$ con i vettori di $\mathbb{R}^{NM}$ possiamo notare che $\bar{A}$ corrisponde a $|\mathbf{A}|_\infty$ precedentemente introdotta. Quindi possiamo scrivere $\|\mathbf{A}\| \leq NM|\mathbf{A}|_\infty$. Quindi qualunque applicazione lineare da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$ è continua.

Notiamo che vale anche $|\mathbf{A}|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|$ dato che per ogni $i = 1, \dots, M$ e ogni $j = 1, \dots, N$

$$|a_{i,j}| = |(\mathbf{A}\hat{e}_j)_i| \leq |\mathbf{A}\hat{e}_j| \leq \|\mathbf{A}\||\hat{e}_j| = \|\mathbf{A}\|$$

e quindi la stessa disuguaglianza vale prendendo il massimo di tutti gli $|a_{i,j}|$.

Ne segue che $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_\infty$ sono norme equivalenti. Dunque la convergenza indotta sulle matrici $N \times N$ dalla norma delle corrispondenti applicazioni lineari coincide con quelle che si ottengono vedendo le matrici come MN-uple di numeri. In sostanza una successione di matrici $\mathbf{A}_n$ tende ad una matrice $\mathbf{A}$ (nel senso delle applicazioni lineari) se e solo se ogni componente di $\mathbf{A}_n$ tende alla corrispondente componente di $\mathbf{A}$.

Quanto fatto per $\mathbb{R}^N$ vale per gli spazi di dimensione finita.

2.5.7 Teorema. *Ogni applicazione lineare tra spazi normati di dimensione finita è continua.*

Vedremo che, come per la completezza, anche quest'ultimo teorema non vale più negli spazi di dimensione infinita. Cominciamo però col mostrare qualche esempio di applicazione continua tra spazi di funzioni.

2.5.8 Esempio. Consideriamo lo spazio $\mathbb{X} = \mathcal{C}^0(A)$ con la norma $\|f\| = \|f\|_{\infty,A}$. Se x_0 è un punto prefissato in A si può considerare

$$F_1(f) := f(x_0) \qquad \text{per ogni } f \text{ in } \mathcal{C}^0(A)$$

e quindi $F_1 : \mathcal{C}^0(A) \to \mathbb{R}$; si può anche prendere $F_2 : \mathcal{C}^0(A) \to \mathbb{R}$ definita da

$$F_2(f) := \int_A f(x)\,dx \qquad \text{per ogni } f \text{ in } \mathcal{C}^0(A)$$

(in questo caso lo spazio di arrivo è lo spazio unidimensionale $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$). Entrambe queste due applicazioni sono lineari (come è ovvio verificare). Esse sono anche continue. Per la continuità di F_1 basta osservare che

$$f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n(x_0) \to f(x_0)$$

(la convergenza uniforme implica quella puntuale). Per quanto riguarda la continuità di F_2, questa è il contenuto del teorema 2.1.10.
Notiamo che se $f \in \mathcal{C}^0(A)$

$$|F_1(f)| = |f(x_0)| \le \|f\|_\infty \Rightarrow \|F_1\| \le 1$$

e analogamente

$$|F_2(f)| = |\int_A f(x)\,dx| \le |A|\,\|f\|_\infty \Rightarrow \|F_2\| \le |A|.$$

Si potrebbe dimostrare che valgono le eguaglianze, cioè che:

$$\|F_1\| = 1, \qquad \|F_2\| = |A|.$$

2.5.9 Esempio. Riprendiamo lo spazio $\mathbb{X} = C^0([0,1])$, ma consideriamo in $\mathbb{X}$ la norma $\|\cdot\|_1$ dell'esempio 2.2.14. Consideriamo di nuovo le applicazione $F_1, F_2 : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ dell'esempio precedente.

Si vede facilmente che F_2 è continuo, infatti per ogni funzione continua f si ha:

$$|F_2(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1.$$

Quindi, con quest'altra norma, si ha $\|F_2\| \le 1$ (e si potrebbe vedere che $\|F_2\| = 1$).

Invece F_1 **non è continuo**. Consideriamo infatti le funzioni f_n definite da

$$f_n(t) := \begin{cases} 1 - nt & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

È chiaro che f_n sono continue, dunque $f_n \in \mathbb{X}$, e che

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\, dt = \int_0^{1/n} (1 - nt)\, dt = \frac{1}{2n} \to 0$$

e quindi le $f_n \to \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la funzione nulla. Però $F_1(f_n) = f_n(0) = 1$ mentre $F_1(\mathbf{0}) = 0$ e dunque non è vero che $F_1(f_n) \to F_1(\mathbf{0})$, cioè F_1 non è continua.

2.5.10 Osservazione. I due esempi precedenti mostrano che $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ **non sono norme equivalenti** su $\mathcal{C}^0(A)$. Questo per la verità era già chiaro dato che $\mathcal{C}^0(A)$ è completo rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, mentre non lo è rispetto a $\|\cdot\|_1$.

2.5.11 Esempio. Si può considerare l'insieme $\mathbb{X}_1$:

$$\mathbb{X}_1 := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(A) : f \text{ è derivabile} \right\}$$

che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X} = \mathcal{C}^0(A)$, dato che f, g derivabili implica $\alpha f + \beta g$ derivabile. Allora l'applicazione $D : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}$ definita da $D(f) := f'$ (D é *l'operazione* di derivazione) è lineare dato che

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g)$$

Però D non è continua, se si considera (sia in partenza che in arrivo) la distanza introdotta sopra. Per vederlo prendiamo $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$. Si vede facilmente che $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ e quindi $f_n \xrightarrow{unif} 0$. Inoltre $f_n \in \mathbb{X}_1$ per ogni n. Però $f_n'(x) = \cos(nx)$ e quindi $\|D(f_n)\| = \|f_n'\| = 1$. Questo implica che non può essere $D(f_n) \xrightarrow{unif} D(0)$, altrimenti $1 = \|D(f_n)\| \to \|D(0)\| = 0$, che é assurdo.
Abbiamo trovato quindi un altro esempio di applicazione lineare non continua. Inoltre se si rilegge l'esempio 2.1.11 in termini astratti si vede che esso dice che il sottospazio $\mathbb{X}_1$ non è chiuso in $\mathbb{X}$ (altra proprietà che sarebbe vera se fossimo in dimensione finita)

2.6 Serie di potenze

In questo paragrafo useremo il risultati precedenti per studiare serie del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Per motivi che saranno chiari nei prossimi paragrafi risulta conveniente ambientare il problema nei numeri complessi, quindi, almeno all'inizio, i coefficienti a_k saranno dei numeri complessi, $z_0 \in \mathbb{C}$ e faremo variare la z in $\mathbb{C}$. Ad un certo punto però (quando entreranno in gioco le derivate) ci metteremo in $\mathbb{R}$, supponendo $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}$; utilizzeremo allora, per "ragioni estetiche" x_0 e x al posto di z_0 e z.

Nel resto del paragrafo z_0 sarà un numero fissato. Per $R > 0$ consideriamo il disco *aperto* di centro z_0 e raggio R:

$$B(R) = B_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

e il corrispondente disco *chiuso*

$$\bar{B}(R) = \bar{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Fatte queste premesse possiamo scrivere subito il seguente enunciato:

2.6.1 Teorema. *Siano (a_n) una succesione in $\mathbb{C}$ e poniamo:*

$$M := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(per esempio supponiamo che esista il limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ e chiamiamolo M). In generale $M \in [0, +\infty]$. Poniamo

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & \textit{se } M = 0, \\ \dfrac{1}{M} & \textit{se } M \in]0, \infty[, \\ 0 & \textit{se } M = +\infty. \end{cases}$$

Allora:

1. *per ogni R con $0 < R < \bar{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniformemente su $\bar{B}(R)$; questo implica che per ogni z in $B(\bar{R})$ la serie converge puntualmente in z;*

2. *per ogni z fuori da $\bar{B}(\bar{R})$ la serie non converge in z.*

Si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda sulla "buccia" $S(\bar{R}) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \bar{R}\}$.

Dimostrazione. Sia $R < \bar{R}$ e applichiamo il teorema 2.4.2 alla serie di funzioni $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sull'insieme $A = \bar{B}(R)$. Si ha:

$$\|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty,\bar{B}(R)} = \sup_{z\in\bar{B}(R)} |a_n(z - z_0)^n| = |a_n|R^n.$$

Se applichiamo alla serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty,\bar{B}(R)}$ il criterio della radice troviamo:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty,\bar{B}(R)}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}R = MR = \frac{R}{\bar{R}} < 1$$

e dunque la serie converge (questo funziona se $\bar{R} \neq 0, \infty$, ma è chiaro che se $\bar{R} = 0$ il teorema non dice nulla dato che non ci sono R ammissibili, mentre se $\bar{R} = \infty$, cioè se $M = 0$, tutti gli $R > 0$ vanno bene perchè $MR = 0$).
Dalla convergenza di $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty,\bar{B}(R)}$ si deduce la convergenza uniforme della serie di funzioni sul disco chiuso $\bar{B}(R)$.
In particolare, se $z \in B(\bar{R})$ (disco aperto) si può prendere un raggio R con $|z - z_0| < R < \bar{R}$; dato che la serie converge uniformemente su $\bar{B}(R)$ deve convergere in z.
Infine se $|z - z_o| > \bar{R}$ si ha:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| = M|z - z_0| = \frac{|z - z_0|}{\bar{R}} > 1$$

che, sempre per il criterio della radice, implica che la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ non converge. □

2.6.2 Definizione. Data la successione (a_n) in $\mathbb{C}$ chiamiamo *raggio di convergenza* della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ il numero $\bar{R}$ (in $[0, +\infty]$) ottenuto nel teorema (2.6.1).
Risulta quindi definita la funzione $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ per ogni z in $B(\bar{R})$ (se $\bar{R} = 0$ $B(\bar{R}) = \emptyset$; se $\bar{R} = +\infty$ $\bar{R} = \mathbb{C}$).

2.6.3 Proposizione. *La funzione*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

è (ben definita e) continua nel disco aperto $B(\bar{R})$, dove $\bar{R}$ è il raggio di convergenza della serie.

Dimostrazione. La tesi è una conseguenza del teorema 2.1.9, dato che le somme parziali $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ sono ovviamente continue e convergono uniformemente a f su ogni disco chiuso $B(R)$, se $R > \bar{R}$. □

D'ora in poi consideriamo il caso a coefficienti reali. In realtà tutto quanto stiamo per dire vale allo stesso modo nel caso generale, ma per poter vedere ciò avremmo bisogno di sapere cosa è la derivata in z di una funzione di variabile complessa. Quando faremo tale definizione risulterà chiaro che tutta la teoria delle serie di potenze si ambienta natutalmente nei numeri complessi. Quindi ora $a_n \in \mathbb{R}$ e $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$; naturalmente il raggio di convergenza $\bar{R}$ è definito come prima, però se vogliamo prendere la $z = x$ reale dobbiamo considerare $x \in]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$.

2.6.4 Proposizione. *La funzione $f :]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[\to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

è di classe $\mathcal{C}^\infty$, cioè ha derivata k-esima continua per qualunque k intero. Inoltre vale la formula

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} \qquad \forall z \text{ in }]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[\tag{2.5}$$

dove la serie (delle derivate) scritta destra ha lo stesso raggio di convergenza *$\bar{R}$ della serie di partenza.*

Dimostrazione. Verifichiamo che la serie delle derivate k-esime ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza. Per questo ricordiamo che $\sqrt[n]{n} \to 1$ (e allora anche $\sqrt[n]{n-1} \to 1, \ldots, \sqrt[n]{n-k} \to 1$). Dunque se $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = M$ si ha

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)|} =$$
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n-1}\cdots\sqrt[n]{n-k+1} = M.$$

Quindi i raggi di convergenza sono gli stessi. A questo punto la tesi segue per il corollario (2.4.4). □

2.6.5 Osservazione. Se mettiamo $x = x_0$ nella formula (2.5), otteniamo:

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

cioè f (in $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$) *è eguale alla sua serie di Taylor.*

2.6.6 Esempio. Consideriamo la serie $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Allora il raggio di convergenza è 1 dato che $\sqrt[n]{1} \to 1$. Peraltro si sa che:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z} \qquad \text{se } |z| < 1$$

e quindi $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ per ogni z del disco aperto $\{|z| < 1\}$ (in particolare $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ se $-1 < x < 1$).
Consideriamo ora un'altra serie $g(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$. Anche questa serie ha raggio di convergenza 1 dato che $\sqrt[n]{1/n} \to 1$. Notiamo che $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^n}{n} = x^{n-1}$ e dunque

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x).$$

In altre parole g è una primitiva di f, cioè $g(x) = \ln(1-x) + c$ per c costante. Ma calcolando tutto in $x = 0$ si trova $0 = g(0) = c$ e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1 - x) \qquad \text{se } -1 < x < 1.$$

Consideriamo ancora una terza serie: $h(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$. Anch'essa ha raggio di convergenza 1 perché $\sqrt[n]{n} \to 1$. Si ha

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}x^n = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = xf'(x)$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{se } -1 < x < 1.$$

2.6.7 Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$. Questa serie ha raggio di convergenza 1. In questo caso in verità non esiste $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ perché si ha:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ 0 & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

però il massimo limite fa 1, come si vede passando alla sottosuccessione $\sqrt[2k]{|a_{2k}|}$. Si vede facilmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2} \qquad \text{se } |z| < 1.$$

Quindi la serie converge a $\frac{1}{1+z^2}$ per le z in $\{|z| < 1\}$. Guardando la cosa dal punto di vista di $\mathbb{R}$ la cosa è abbastanza strana, dato che non si capisce come c'entri il numero 1 con la funzione $\frac{1}{1+x^2}$, che è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Dal punto di vista complesso invece è chiaro che il raggio di convergenza non può essere più di 1 dato che i e $-i$, cha hanno modulo uno, sono delle singolarità per $\frac{1}{1+z^2}$.

Abbiamo visto prima che data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ essa definisce una funzione f sull'intervallo $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$ ed f è somma della sua serie di Taylor. Procediamo a rovescia e assegnamo una funzione f di classe $\mathcal{C}^\infty$, definita per esempio su $]x_0 - r, x_0 + r[$, e poniamo $a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. È spontaneo chiedersi se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (costruita a partire da f) sia convergente in $]x_0 - r, x_0 + r[$ e soprattutto se converga a f. Il seguente esempio mostra che, in generale, ciò non è vero.

2.6.8 Esempio. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} e^{1/|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È chiaro che f è continua in zero, dato che $e^{-|x|^{-1}} \to 0$ per $x \to 0$.

Per $x > 0$ si ha:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = -x^{-2}e^{x^{-1}}\\
&f''(x) = (2x^{-3} + x^{-4})e^{x^{-1}}\\
&f^{(3)}(x) = (-6x^{-4} - 4x^{-5} - 2x^{-5} - x^{-6})e^{x^{-1}} = (-6x^{-4} - 6x^{-5} - x^{-6})e^{x^{-1}}\\
&\qquad\vdots\\
&f^{(k)}(x) = P_k(x^{-1})e^{x^{-1}}
\end{aligned}
$$

per un opportuno polinomio P_k. Dato che l'esponenziale "vince "su ogni polinomio si trova

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0$$

qualunque sia k intero. Lo stesso si trova facendo il limite da sinistra per cui $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k intero. Quindi

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad \forall k.$$

In altri termini f si annulla in zero più rapidamente di qualunque potenza. Tutto questo implica che la serie di Taylor associata a f nel punto zero ha tutti i coefficienti nulli e dunque converge uniformemente ovunque alla funzione zero. Dato che $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$ si ha che $f(x)$ *non è eguale alla somma della sua serie di Taylor in nessuna* $x \neq 0$.
Vedremo nel seguito che questo dipende dal fatto che stiamo ragionando in $\mathbb{R}$, se infatti guardassimo la funzione in $\mathbb{C}$ essa non sarebbe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di zero.

Nel seguente enunciato si dà un criterio (sufficiente ma non necessario) per far funzionare le cose.

2.6.9 Proposizione. *Supponiamo che* $f :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ *sia di classe* $\mathcal{C}^\infty$ *e supponiamo che esista una costante* K *tale che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq K^n \qquad \text{per tutte le } x \text{ in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

Allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

Dimostrazione. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi_{n,x}$ è un opportuno punto, che dipende da n e da x, che si trova sul segmento tra x_0 e x. Facendo tendere n all'infinito:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{K^{n+1}r^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

(il fattoriale va all'infinito più velocemente dell'esponenziale) e dunque la serie converge a $f(x)$. □

2.6.10 Esempio. La funzione $f(x) := e^x$ é somma della sua serie di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

per tutti gli x in $\mathbb{R}$. Infatti, fissato $R > 0$

$$\max_{x\in[-R,R]} |f^{(k)}(x)| = \max_{x\in[-R,R]} |e^x| = e^R$$

(che é una costante indipendente da n). Per (2.6.9) la tesi vale su $[-R, R]$ e per l'arbitrarietà di R la tesi é vera ovunque.
Nello stesso modo si può verificate che

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

per tutti gli x in $\mathbb{R}$.

Notiamo che, da quanto fatto in precedenza, si deduce che tutte tre le serie scritte sopra hanno raggio di convergenza infinito e quindi definiscono delle funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ (mettendo $z \in \mathbb{C}$ al posto di $x \in \mathbb{R}$). In particolare

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n$$

è ben definita per ogni z in $\mathbb{C}$. Facciamo vedere che $f(z_1 + z_2) = f(z_1)fz_2)$. Infatti applicando il teorema 1.2.11 (dimostrato per serie a termini reali, ma valido anche per termini complessi con la stessa dimostrazione) si ha:

$$f(z_1)f(z_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z_1^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z_2^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{n!} = f(z_1 + z_2).$$

Quindi, se $x, y \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$f(x+iy) = f(x)f(iy) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) =$$

$$e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

e dunque, con la definizione tradizionale di e^z per z in $\mathbb{C}$, troviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z.$$

Si potrebbe in realtà *definire* le le funzioni e^z, $\sin(z)$ e $\cos(z)$ mediante le serie scritte sopra, e *dimostrare* che la formula $e^{x+iy} := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ è una conseguenza di tali definizioni.

2.7 L'esponenziale di una matrice

Come abbiamo visto, se A è una matrice $N \times N$, è definita la norma di A, vedendo A come applicazione lineare da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N$ e quindi è definita una convergenza nello spazio delle matrici $N \times N$: $A_n \to A$ se e solo se $\|A_n - A\| \to 0$. Abbiamo anche visto che tale convergenza si traduce nella convergenza componente per componente, cioè

$$A_n \to A \Leftrightarrow a_{ij}^{(n)} \to a_{ij}$$

dove $a_{ij}^{(n)}$ indica la componente ij di A_n e a_{ij} indica la componente ij di A. La stessa cosa si può fare se A è una matrice $N \times N$ a componenti complesse - vedendo A come applicazione lineare da $\mathbb{C}^N$ a $\mathbb{C}^N$.

Data A matrice $N \times N$ a coefficienti $a_{ij} \in \mathbb{C}$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

che converge perché è assolutamente convergente; infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|}.$$

Tale serie si chiama *esponenziale della matrice* A e si indica con e^A. Quindi $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ converge a e^A nelle matrici e cioè componente per componente.

2.7.1 Proposizione. *Se $AB = BA$ (A e B commutano) allora*

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}.$$

Prima della dimostrazione premettiamo un risultato analogo al teorema (1.2.11), la cui dimostrazione si potrebbe ottenere imitando gli stessi argomenti usati nella dimostrazione di (1.2.11)

2.7.2 Proposizione. *Siano (A_n) e (B_n) due successioni di matrici tali che $A_n B_m = B_m A_n$ per ogni m, n e supponiamo che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < +\infty, \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\| < +\infty.$$

Poniamo

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}.$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} \|C_n\| < +\infty$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right).$$

Dimostrazione di (2.7.1). Applichiamo la proposizione sopra al caso $A_n = \dfrac{A^n}{n!}$ e $B_n = \dfrac{B^n}{n!}$. È chiaro che le ipotesi sono verificate e quindi:

$$e^A e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \right) =$$
$$\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}$$

□

2.7.3 Proposizione. *Se M è una matrice invertibile, allora*

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1} e^A M.$$

Dimostrazione. Poniamo $A_1 := M^{-1}AM$. Allora

$$A_1^n = (M^{-1}AM)(M^{-1}AM) \cdots (M^{-1}AM) = M^{-1}AA \cdots AM = M^{-1}A^n M.$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A_1^k}{k!} = M^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right) M$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Supponiamo che la matrice A sia diagonale, allora

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene facilmente

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}$$

Più in generale supponiamo che A abbia N autovalori reali distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Allora si può trovare una base di N autovalori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ (cioè $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$). Se allora prendiamo la matrice $M = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ le cui colonne sono i vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, cioè la matrice M tale che $M\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i$ allora si vede facilmente che M è invertibile e che

$$M^{-1}AM\hat{\mathbf{e}}_i = M^{-1}A\mathbf{e}_i = M^{-1}\lambda_i\mathbf{e}_i = \lambda_i\hat{\mathbf{e}}_i$$

e quindi $D := M^{-1}AM$ è la matrice diagonale avente gli autovalori di A sulla diagonale principale. Da questo fatto segue che $A = MDM^{-1}$ da cui

$$e^A = e^{MDM^{-1}} = Me^DM^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_N} \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Vediamo ora come si descrive in generale l'esponenziale di una matrice 2×2

2.7.4 Esempio. Sia A una matrice complessa 2×2. Dato che gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico che è di secondo grado si possono presentare due casi.

1. A ha due autovalori distinti λ_1 e λ_2 in $\mathbb{C}$ e dunque ha due autovettori $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^2$. Allora, come abbiamo appena visto, se $M = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

$$D := M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$e^A = e^{MDM^{-1}} = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} M^{-1}$$

2. A ha un solo autovalore reale λ (che deve essere una radice doppia del polinomio caratteristico). Sia $\mathbf{e}$ un autovalore di A e consideriamo $M = (\mathbf{e}, \mathbf{w})$ dove $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore linearmente indipendente da $\mathbf{e}$. Allora si vede che

$$T := M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

per un opportuno γ reale. Infatti $T\hat{\mathbf{e}}_1 = M^{-1}AM\hat{\mathbf{e}}_1 = M^{-1}A\mathbf{e} = M^{-1}\lambda\mathbf{e} = \lambda\hat{\mathbf{e}}_1$, da cui si ricava $t_{11} = \lambda$ e $t_{21} = 0$, e quindi T è triangolare superiore. Inoltre $t_{22} = \lambda$ dato che λ è l'unico autovalore.
Allora

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \gamma n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

come si verifica facilmente ragionando induttivamente. Ne segue che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} & \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \gamma e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$$

Quindi, ragionando come prima

$$e^A = Me^TM^{-1} = M \begin{pmatrix} e^\lambda & \gamma e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} M^{-1}$$

Supponiamo ora che A sia a coefficienti reali e cerchiamo una versione reale dei risultati appena trovati. In questo casi si possono distinguere tre casi.

1. A ha due autovalori reali distinti. Ragionando come nel caso complesso si trovano due autovalori $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ linearmente indipendenti e reali. Posto $M = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ si trova

$$e^A = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} M^{-1}$$

2. A ha un solo autovalore λ, che deve per forza essere reale. Anche questo caso si tratta nello stesso modo del secondo caso di prima, con l'unica differenza che $\lambda, \gamma, \mathbf{e}$ e $\mathbf{w}$ sono tutti reali.

3. A non ha autovalori reali. Questo significa che il polinomio caratteristico ha due radici complesse coniugate $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (essendo un polinomio di secondo grado a coefficienti reali). È anche

facile verificare che i corrispondenti autovalori $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ formano una coppia di vettori coniugati, cioè

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x} + i\mathbf{y}, \qquad \mathbf{e}_2 = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$$

dove $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Non è difficile verificare che $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti dato che $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ lo sono. Per quanto visto nel punto (1) del caso complesso si ha $e^A\mathbf{e}_1 = e^\lambda \mathbf{e}_1$, $e^A\mathbf{e}_2 = e^{\bar{\lambda}}\mathbf{e}_2$. Definiamo ora la matrice reale $M = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ che è invertibile, essendo le sue due colonne linermente indipendenti. Si ha:

$$\begin{aligned} M^{-1}e^AM\hat{\mathbf{e}}_1 =& M^{-1}e^A\mathbf{x} = M^{-1}e^A\frac{1}{2}(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = M^{-1}\frac{1}{2}(e^\lambda\mathbf{e_1} + e^{\bar{\lambda}}\mathbf{e_2}) = \\ & M^{-1}\frac{e^\alpha}{2}(e^{\beta i}\mathbf{e_1} + e^{-\beta i}\mathbf{e_2}) = M^{-1}e^\alpha(\cos(\beta)\mathbf{x} - \sin(\beta)\mathbf{y}) = \\ & e^\alpha(\cos(\beta)\hat{\mathbf{e}}_1 - \sin(\beta)\hat{\mathbf{e}}_2); \\ M^{-1}e^AM\hat{\mathbf{e}}_2 =& M^{-1}e^A\mathbf{y} = M^{-1}e^A\frac{1}{2i}(\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}) = M^{-1}\frac{1}{2i}(e^\lambda\mathbf{e_1} - e^{\bar{\lambda}}\mathbf{e_2}) = \\ & M^{-1}\frac{e^\alpha}{2i}(e^{\beta i}\mathbf{e_1} - e^{-\beta i}\mathbf{e_2}) = M^{-1}e^\alpha(\sin(\beta)\mathbf{x} + \cos(\beta)\mathbf{y}) = \\ & e^\alpha(\sin(\beta)\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos(\beta)\hat{\mathbf{e}}_2). \end{aligned}$$

Quindi

$$M^{-1}e^AM = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

cioè

$$e^A = M \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Consideriamo ora la funzione

$$t \mapsto e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!}$$

Tale funzione è una serie di potenze in t, anche se formalmente non ricade nella teoria svolta, perché i coefficienti di t non sono numeri ma matrici. In effetti la funzione sopra associa ad ogni t reale una matrice $N \times N$. Non è difficile verificare però che le cose vanno come nel caso di serie numeriche (si potrebbe per esempio ragionare componente per componente) e quindi si ha che il raggio di convergenza è infinito (come era già chiaro dato che e^{tA} è definito come somma della sua serie per ogni t) e inoltre si può derivare sotto il segno di serie ottenendo

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^nA^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!} = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} = Ae^{tA}$$

(la derivata va intesa, per esempio, componente per componente). Quindi la funzione $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(N,N)$, $M(t) := e^{tA}$ dove $\mathcal{M}(N,N)$ denota lo spazio delle matrici $N \times N$ verifica l'equazione

$$M'(t) = AM(t)$$

Da quanto detto si deduce il risultato seguente

2.7.5 Proposizione. *Siano A una matrice $N \times N$ a coefficienti complessi, $B : I \to \mathbb{C}^N$ una funzione continua, dove I è un intervallo in $\mathbb{R}$, siano t_0 in I e Y_0 in $\mathbb{C}^n$. Allora l'unica soluzione Y del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} Y'(t) & = AY(t) + B(t) \\ Y(t_0) & = Y_0 \end{cases}$$

è data da

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}\left(Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau - t_0)A} B(\tau)\, d\tau\right) \tag{2.6}$$

Dimostrazione. L'unicità della soluzione è un fatto standard nella teoria dei sistemi di equazioni differenziali lineari. L'unica cosa da vedere è che la Y definita sopra risolve l'equazione. In effetti:

$$Y(t_0) = e^{0A}\left(Y_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{-(\tau - t_0)A} B(\tau)\, d\tau\right) = Y_0$$

e

$$\begin{aligned} Y'(t) = &\left(\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A}\right)\left(Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau - t_0)A} B(\tau)\, d\tau\right) + \\ &e^{(t-t_0)A}\frac{d}{dt}\left(Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau - t_0)A} B(\tau)\, d\tau\right) = \\ &Ae^{(t-t_0)A}\left(Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau - t_0)A} B(\tau)\, d\tau\right) + \\ &e^{(t-t_0)A}\left(e^{-(t-t_0)A} B(t)\right) = AY(t) + B(t) \end{aligned}$$

□

Tutto quanto detto fin'ora fa capire come il calcolo dell'esponenziale di una matrice rivesta importanza nella risoluzione di sistemi di eqauzioni differenziali ordinarie. Vediamo un esempio (che non è per nulla esaustivo).

2.7.6 Esempio. Consideriamo il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} y_1' &= & y_1 & - & y_2 & + & \frac{\sqrt{2}}{2}y_3 & = & t \\ y_2' &= & -y_1 & + & y_2 & + & \frac{\sqrt{2}}{2}y_3 & = & 0 \\ y_3' &= & \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 & + & \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 & & & = & 2 \end{cases}, \tag{2.7}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

Per risolverlo siamo condotti a studiare l'esponenziale della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che A è simmetrica; questo semplifica alcune cose in quanto, come noto, A deve avere tre autovalori reali corrispondenti a tre autovettori linearmente indipendenti, anzi tra loro ortogonali. Troviamo gli autovalori cercando le radici del polinonio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1-\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-(1-\lambda)(1-\lambda)\lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-\lambda) - \frac{1}{2}(1-\lambda) + \lambda = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

Le radici di P sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Cerchiamo gli autovettori. Per quanto riguarda $\lambda = \lambda_1 = -1$ dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & - & y & + & \frac{\sqrt{2}}{2}z & = 0 \\ -x & + & 2y & + & \frac{\sqrt{2}}{2}z & = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x & + & \frac{\sqrt{2}}{2}y & + & z & = 0 \end{cases}$$

che equivale a $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}z$; conviene considerare un autovalore di modulo uno, imponendo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ da cui $2z^2 = 1$ e quindi

$$\mathbf{e}_1 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Con calcoli analoghi si trovano gli autovettori relativi a λ_2 e λ_3:

$$\mathbf{e}_2 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora $M := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$; essendo le sue colonne dei vettori **ortonormali** la sua inversa è pari alla sua trasposta quindi, indicando con D la matrice diagonale di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ si ha:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e $M^{-1}AM = D \Leftrightarrow A = MDM^{-1}$. Quindi

$$e^{ta} = e^{tMDM^{-1}} = Me^{tD}M^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} M^{-1}$$

e facendo gli opportuni calcoli si trova

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{t}}{4} + \frac{e^{2t}}{2} & \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{t}}{4} - \frac{e^{2t}}{2} & -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^{t}}{4} \\ \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{t}}{4} - \frac{e^{2t}}{2} & \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{t}}{4} + \frac{e^{2t}}{2} & -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^{t}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^{t}}{4} & -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^{t}}{4} & \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2} \end{pmatrix}.$$

La conoscenza di e^{tA} ci permette di risolvere l'equazione omeogenea per un qualunque dato iniziale. Se per esempio vogliamo risolvere

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3 = 0 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3 = 0 \\ y_3' = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 = 0 \end{cases}, \tag{2.8}$$

$$y_1(0) = -2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1,$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(2+\sqrt{2})}{4}e^{-t} - \frac{(2-\sqrt{2})}{4}e^{t} - e^{2t} \\ -\frac{(2+\sqrt{2})}{4}e^{-t} - \frac{(2-\sqrt{2})}{4}e^{t} + e^{2t} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-t} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{t} \end{pmatrix}$$

Se invece vogliamo risolvere il problema iniziale 2.7, dobbiamo applicare la formula 2.6 con $t_0 = 0$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Facendo i calcoli si ottiene

$$e^{-\tau A}B(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{t-2\sqrt{2}}{4}e^{\tau} + \frac{t+2\sqrt{2}}{4}e^{-\tau} + \frac{t}{2}e^{-2\tau} \\ \frac{t-2\sqrt{2}}{4}e^{\tau} + \frac{t+2\sqrt{2}}{4}e^{-\tau} - \frac{t}{2}e^{-2\tau} \\ -\frac{\sqrt{2}t-4}{4}e^{\tau} + \frac{\sqrt{2}t+4}{4}e^{-\tau} \end{pmatrix}.$$

e integrando tra 0 e t erimoltiplicando per e^{tA} si trova la soluzione

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^{-t} + \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^{t} + e^{2t} - \frac{5+8\sqrt{2}+2t}{8} \\ \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^{-t} + \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^{t} - e^{2t} - \frac{3+8\sqrt{2}-2t}{8} \\ -\frac{4+\sqrt{2}}{4}e^{-t} + \frac{4+\sqrt{2}}{4}e^{t} - \sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

MORALE: questi calcoli li fa meglio un computer - l'importante è però avere capito cosa si deve fare e come sia importante capire la natura di e^{tA}.